目　录

第 一 章

17世纪：近代数学的创立
——解析几何与微积分的诞生

世界数学发展史，一般划分为四个时期：数学的产生（公元前3000年至公元前5世纪）；常量数学即初等数学（公元前5世纪至公元17世纪）；变量数学即近代数学（公元17世纪至19世纪末）；现代数学（19世纪末至今）。

在数学史上，17世纪被称为天才的、富于伟大发现的英雄世纪。在欧洲，数学在印度、阿拉伯和文艺复兴时期所取得的成就的基础上，受到资本主义生产方式发展特别是产业革命的刺激，发生了极其深刻的变革，它一方面继承了希腊数学关于数学是研究自然的有力工具这个光辉传统，另一方面又实现了数学史上继希腊数学之后的一大飞跃，创立了近代数学，从而开始了数学发展中一个本质上的新时期。这是一个划时代的充满创新精神的革命时期，在数学的基本思想、基本方法、基本内容和发展方向上都发生了根本的转变。

此阶段数学发展的特点：（1）超越了古希腊传统的潮流，思想方法上忽略了长期占统治地位的数学的严格性，发展了直观推断思想。数学研究的基本思想从以常量观念为中心转到以变量观念为中心。（2）代数与几何得到平衡。数学研究的基本方法从希腊传统的几何的演绎法，转变为算术、代数的分析法。在此之前，

数学的基本对象数和形基本上是彼此分离的，算术、代数和几何基本上是彼此独立发展的。近代数学的基础解析几何和微积分的诞生，标志着算术、代数与几何的结合成为数学发展的一个重要方向。人们认识到了数的重要性超过图形，积极使用“无限”概念；发现了问题之间的显著联系，用微积分方法解决了力学的一些问题和计算体积、面积、弧长、作切线等。（3）重视与实验相结合，纯粹数学和应用数学重新结合的趋势得到加强，确立了数学在自然科学方法中的地位，数学成为自然科学的推理依据（例如牛顿的《自然哲学的数学原理》表明了物理学和数学不可分割的联系），从而使人们对自然规律有了更精确、更深入的认识，这正是自然科学的“科学”精神之所在。

17世纪数学的最大成就是创立了解析几何学和微积分，这两门学科的建立为近代数学大厦的形成和发展，提供了坚实基础和广阔前景。

Ⅰ．变量数学发展的第一个决定性步骤

（1）解析几何产生的背景

16世纪，经历了1000年中世纪黑暗后的欧洲受到文艺复兴思潮的强烈冲击，近代自然科学在那里兴起，数学在那里复苏并又得到长足的发展。

自古代到近代，数学在欧洲经历了一个曲折起伏的发展过程。古希腊人（毕达哥拉斯学派——欧几里得——阿基米德——阿波罗尼乌斯）在数学，特别是在几何学方面表现出杰出的才能并取得了辉煌的成就。但是，经过罗马人的统治和进入中世纪以后，数学在欧洲沉寂衰落。文艺复兴运动掀起了以复兴古希腊、

古罗马文化为旗帜的思想革命，带来了欧洲古典文化、学术的繁荣。这为近代自然科学的发展提供了丰富的营养，例如毕达哥拉斯学派重视“数”和“数学美”的思想，亚里士多德和欧几里得应用演绎逻辑的严格证明方法等等，都对近代自然科学产生了深远影响，崇尚数学的思想在近代初期的科学家心中再度复苏。特别是自然科学例如天文学、力学、航海等当时的前沿学科发展的迫切需要，是欧洲揭开数学史新篇章的根本动力。17世纪初叶，被尊称为近代自然科学之父的意大利天文学家、力学家、哲学家伽利略，以及德国天文学家开普勒等，不仅在天文学和经典物理学上做出了奠基性贡献，而且开创了近代自然科学的研究方法，即把实验方法提高到真正科学的水平，同时又把实验方法与数学方法成功地结合起来。这是有划时代意义的贡献，是数学观和数学方法论的重大突破。在这种背景下，提出了用运动的观点来研究圆锥曲线和其它曲线的问题以及解决这个问题所必须采取的一般方法。

科学的需要和对方法论的兴趣，古希腊学术的复兴以及东方数学的传入，推动了17世纪的欧洲数学家用代数来研究几何。由于东方（主要是阿拉伯）代数学的传入，使务实的欧洲学者将（古希腊人）集中在演绎推理的几何学上的兴趣，转移到用代数解决实际问题这个方向上来，用代数学的方法来解决几何问题。这比起用几何学方法来解决许多代数问题从而称几何学是数学之王的古希腊时代，真可谓是反其道而行之。16世纪末，代数学经过缓慢的发展已达到了相当完善的程度。1591年，法国数学家韦达著《分析术引论》，系统使用符号表示已知数与未知数，确立了符号代数，使代数学从一门过去以解决特殊问题侧重于计算的数学分支，演变为一门以研究一般类型的形式和方程的学问。韦达著作中的许多代数问题，多为解决几何问题而变化过来的。1607年，韦达的学生格达拉底发表《阿波罗尼乌斯著作的现代阐释》，专门对几何问题的代数解法作了系统的研究。阿波罗尼乌

斯曾于公元前225年著8卷《圆锥曲线论》，几乎将圆锥曲线的性质网罗殆尽，他对圆锥曲线理论的重大突破堪与建立几何学完整演绎体系的欧几里得《几何原本》媲美。以致两千年后，开普勒和牛顿还原封不动地搬用来推导行星轨道的性质。许多结果假若一旦翻写为坐标语言，就与两千年后笛卡尔方程一致。但遗憾的是，阿波罗尼乌斯的工作由于没有代数的帮助而走到了解析几何的入口处就未能再前进了。1630年，格达拉底在《数学的分析与综合》中对用代数方法解几何问题进行了更详细的讨论。次年，英国的哈里奥特发表《实用分析学》，对韦达和格达拉底的思想进行引申和系统化。这为几何学与代数学的结合铺平了道路。这种依赖代数学手段研究几何问题的方法导致了解析几何学的产生。当时，许多优秀的数学家已经接近了解析几何学的观念。其中，法国人费尔马和笛卡尔几乎同时独立地做出了基本上相同的发现（两人曾为优先权而发生过争执），他们的决定性奠基贡献，即是近代解析几何学的起源。

（2）费尔马——具有古典色彩的工作

费尔马是一个业余数学家，三十岁后才从事数学研究。但他的成就在17世纪数学史上占有突出的地位：他为微积分的创立作出了先驱性的贡献；他对近代数论、概率论建立了不朽的丰功伟绩；他是解析几何学名符其实的创立者之一。

费尔马十分熟悉古希腊几何学和韦达关于代数解决几何问题的方法。很早就用代数方法解决几何问题，在笛卡尔的《几何学》发表之前就已提出了研究曲线轨迹的一般方法。他从希腊几何学的成就出发，特别是把阿波罗尼乌斯圆锥曲线的结果直译成代数形式作为具体目标来研究解析几何，并讨论切线、极值法和求积法。他在1636年9月给法国数学家罗伯瓦（以求切线的方法和在高次平面曲线领域的发现而闻名）的一封信中说，他关于解析几

何的概念已经有 7 年了。在他逝世后 14 年即 1679 年发表的论著《平面和立体的轨迹引论》中，记载了他阐述近代解析几何基础的工作。在这里，费尔马创造性地给出了研究轨迹问题的一般方法，它实质上就是坐标法：首先建立坐标，把平面上的点和一对未知数联系起来，然后在点动成线的思想下，用方程来表示曲线。他说："只要在最后的方程中出现两个未知量就得到一个轨迹。"即是从方程出发，然后来研究轨迹。他给出了一般直线方程，导出了圆、椭圆、双曲线等二次曲线方程，并揭示了圆锥曲线的方程特征即含有两个未知数的二次方程。同时，他还注意到了通过坐标轴的平移和旋转可以使方程简化；不过，却未对此发现作详尽阐述。在1637年前完成的关于求切线和面积的一部著作中，他解析地定义了许多新的曲线，例如现在被称作费尔马双曲线、抛物线和螺线的曲线$x^m y^n = a$，$y^n = a x^m$和$\gamma^n = a\theta$；他还和别人一起提出了以女数学家、哲学家阿格内西（M.G.Agnesi，1718～1799）的名字命名的三次曲线——阿格内西箕舌线。费尔马成功地接近了解析几何的核心思想：引进坐标把曲线与代数方程联系起来，而且给出了代数方程表示各种不同的曲线这种一般的方法和统一的研究手段。这两者的结合，正是费尔马之前的数学家在几乎两千年中所未能做到的。然而，费尔马是以复兴古希腊几何学为主要目的，具有浓厚的古典色彩。他对纵坐标如何依赖于横坐标这一重要思想缺乏足够的认识，并没有给出象现代的直角坐标系而是倾斜坐标，既无纵坐标，又无负数。在从阿波罗尼乌斯的理论中导出圆锥曲线方程时，并未完全摆脱阿氏思想方法的约束，因而具有古典的形式。另外，他使用的是韦达的符号，与笛卡尔较为现代的符号相比，自然显得陈旧。在用代数方程表示直线时，有的地方仍沿袭了韦达的方法，认为方程中各项的次数必须一致，体积（ax^2）、面积（bx）和长度（c）因量纲不同而不能相加减，从而方程$ax^2 + bx + c = 0$没有几何意义。这样，代数与几何

统一的一个关键没有被费尔马突破。所以，费尔马的工作还不成熟，还不能说是纯粹的、已经完善了的解析几何。但是，费尔马的工作无疑意义重大：从此开创了把几何的点与代数的数联系起来的坐标思想和用方程表示曲线的方法。

（3）笛卡尔——超越传统希腊几何学最重要的一步

笛卡尔是解析几何学的主要创立者。早在1618年，他就萌发了用两条正交直线表明坐标来解决自由落体问题的兴趣，当然其形式只能算作14世纪奥雷斯姆图解法的重现，而并没有发挥代数计算的作用。1619年，他利用数形结合原理解决了一个关于比例中项的插入问题。第二年又用此原理证明了用抛物线和圆的交点可求出四次方程的根，并具体标出了圆的中心相对于抛物线的轴和顶点切线的距离，从而体现了坐标方法。从1628年起，笛卡尔在迁居荷兰二十年间完成了一系列著作，从而奠定他“近世哲学之祖”、“第一流物理学家”、“近代生物学奠基人”和“近代数学的开创者”的崇高地位。1628年，笛卡尔发表论著《指导思维的规则》，开始认识到必须引入单位数才能使数形同质，他注意到了横、纵坐标之间的依赖关系和用代数来把握几何。1637年，他发表了一部关于一般科学的哲学论著《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》及三个附录《折光》、《陨星》和《几何学》，正式建立了解析几何，使他的哲学成果——唯理主义方法论在数学上得到充分的体现。在《方法论》一书中，方法论被笛卡尔作为一切工作的首要对象，他把数学作为一种研究的方法和工具来看待，并以此为目标来改造自古希腊流传下来的纯粹追求推理的几何学。他批评欧氏几何学的方法过于特殊和抽象，证明方法缺乏机械化思维而显得“笨拙和不必要”，因而“失去科学的形象”。他认为代数是进行推理，特别是对未知数进行推理的有效方法，具有使运算步骤简单而结果最佳的巨大威力。不过，他却

不满当时的数学家片面强调“形式美和协调性”，批评当时的代数是“一种充满混杂与晦暗，故意用来阻碍思想的艺术，而不象一门改进思想的科学”。他着手寻求一种能联结代数和几何、用代数方法去解决几何问题的新方法。结果，所取得的成就远远超过了他当初的企望。在《几何学》中，笛卡尔把几何算术化，自觉地用代数方法、坐标方法更换了古代方法。他首先用代数方法解决几何作图问题。为此，他引入“单位”的概念，通过定义单位线段而再定义线段的加、减、乘、除和开方，这就使所有的几何量都通过单位而变成统一的关于数的表示。例如a^2不仅可象古希腊几何学那样用一正方形表示，也可用长度为a^2的线段来表示，甚至a^n（n为正整数）都可用线段长度表示。这样，图形中的各种量之间的关系都化为各个数之间的关系了。费尔马曾遇到的拦路虎——方程$ax^2+bx+c=0$是否有几何意义这个问题，被笛卡尔搬掉了，从而突破了代数与几何相统一的一个关键。

笛卡尔的解析几何思想方法的精髓——引进坐标用代数方程表示曲线，然后通过对方程的讨论来给出曲线的性质——是通过对帕普斯问题的解决而体现出来的。帕普斯问题是：已知四条直线AB、AD、EF和GH，从某点C引直线CB、CD、CF和CH分别与一已知直线成已知角CBA、CDA、CFE、CHG，试求满足等式$CB\cdot CF=CD\cdot CH$的点的轨迹。笛卡尔把AB作为给定轴，BC作为主线，并分别记之为x和y，这实际上就是只有横轴和正数没有纵轴和负数的倾斜坐标。由此，他求出了C点的轨迹方程是$y^2=ay+bxy+cx+dx^2$，其中a、b、c，d是由已知量组成的代数式。笛卡尔指出：“如果我们逐次地给线段y以无限多个不同之值，对于线段x也可得到无限个值。这样被表示出来的C点就可以有无限多个，因此可把所求的曲线表示出来。”这就在历史上首次确切地陈述了用方程表示一般图形的方法程序。当然，与费尔马从方程出发研究轨迹不同，笛卡尔在很大程度上是从轨

迹开始然后求出它的方程。这体现了解析几何的基本原则的两个相反方面。从这里可看出，笛卡尔已经巧妙地把过去对立着的两个数学研究对象“数”与“形”统一起来了，并且引入了变量思想，使运动进入了数学，解决了几何中的点与代数中有次序的实数对之间一一对应的问题。这是一个重大的突破，它不仅扩大了数学的范围，而且改变了数学的性质，开始了数学的一次根本性的具有划时代意义的变革。从此，古典几何学的整个领域处于代数学的支配之下，开拓了变量数学的领域。笛卡尔的工作迈出了超越所谓“永恒不变”的传统希腊几何学最重要的一步，为产生微积分创造了先决条件。这是数学发展史上的一个重大转折点，也是变量数学建立的第一个决定性步骤。

解析（坐标）几何的思想并没有很快地被当时的数学家所接受，韦达、牛顿等有名望的数学家都反对把代数、几何混淆。而就笛卡尔的《几何学》本身而言，无论从何种意义上讲，都不是解析方法的系统阐述，而是以含糊的笔法写成的读起来十分困难的孤立的陈述，许多方面还需改进、补充和完善。直到1649年以后，一些数学家才开始阐发、译注、应用并发挥笛卡尔的思想。首先是法国数学家范斯柯登将《几何学》翻译成拉丁文，突出地阐发了笛卡尔关于代数方法的普遍性的方法论思想，使笛卡尔由于强调作图造成解析几何思想不明显的缺点得到克服。由于曲线方程概念的建立，许多新的曲线陆续被发现，如对数螺线（笛卡尔1638）、半立方抛物线（英国奈尔、荷兰霍拉特1657）、摆线（法国帕斯卡1658）、双纽线、旋轮线、悬链线（瑞士雅各·贝努里1694）、卵形线（意大利卡西尼）等等。高次平面曲线的系统研究始于牛顿1704年发表的《三次曲线三枚举》。把解析几何推广到三维空间，虽然笛卡尔早就指出过，但真正开始于18世纪前半叶约翰·贝努里、帕朗、克雷洛、赫尔曼等人的工作。极坐标的现代形式是瑞士数学家欧拉在雅各·贝努里1691年引入不完整的极

坐标和德国数学家赫尔曼1729年明确提出极坐标概念的基础上，于1748年给出的。欧拉还于1745年在《分析引论》中给出了现代形式下的解析几何的系统叙述，迈出了解析几何发展史上重要的一步。之后，法国数学家蒙日于1809年对欧拉的解析几何内容作了重要补充，对三维空间情形作了大量研究。18世纪80年代，法国数学家拉格朗日提出向量概念后，由英国数学家吉布斯和希维赛德创立了向量代数，对解析几何立刻产生了深刻的影响，成为空间解析几何重要的内容。经典解析几何发展到完备的时候，已是19世纪了。

Ⅱ. 变量数学发展的第二个决定性步骤

（1）一百年的微积分孕育期

变量数学发展的第二个决定性步骤，是英国的牛顿和德国的莱布尼兹完成了微积分的创建。从此，常量数学（初等数学）的历史基本告结束，使创造性的数学发展到一个相当高级的水平。微积分是17世纪发现的最伟大的数学工具。有了它，数学研究的许多崭新的、广泛的领域才得以迅速开辟和发展。恩格斯高度评价这一人类智力奋斗的结晶：“在一切理论成就中，未必再有什么象17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利。”

在历史上，积分概念和方法的产生先于微分。积分的原理，溯源于古希腊人所创造的计算面积、体积和弧长相联系的求和方法，在古代的穷竭法中就已萌芽。微分思想虽然可追溯到古希腊，但它的概念和法则几乎是16世纪下半叶后与近代力学同时产生和发展起来的。

自16世纪到17世纪一百多年间，以力学为中心的一系列问题向数学提出了挑战，迫使数学家探索新的数学思想和方法来解决求曲线的长度、曲线围成的面积和体积、物体的重心、变化率和切线、函数的极值、物体在任意时刻的速度和加速度等大量生产、科研实践中提出的数学问题。对上述问题的研究以及对二项式定理和级数的讨论所形成的数学思想和方法的成熟与发展，孕育了微积分的诞生。

在积分概念和方法的形成过程中，作出主要贡献的有：

德国天文学家、数学家开普勒于1615年发表《酒桶的新立体几何学》，发展了与积分相联系的无穷小概念即用无限个同维的无限小元素之和来确定曲面形的面积和体积。例如，把圆当作无限多个边的正多边形从而把无限多个以圆心为顶点的等腰三角形面积之和计为圆面积；把球体看作无限多个以球心为顶点的无限小圆锥组成而计算出球面积。开普勒化曲为直和微小元求和的思想，对积分学很富有启发性。

意大利数学家卡瓦列利于1635年发表《不可分连续量的几何学》，提出了"面是由条数不定的等距离的平行线所构成，体是由等距的平行面所构成"这样一个较一般的积分法——不可分量法。这是在开普勒工作基础上，积分法的一个重要进展。卡瓦列利虽然克服了开普勒用各自不同的直线图形表示不同的曲边图形而有失一般性的缺点，但是他注重考虑的是两个图形对应的不可分量之间的关系①，而非每个面（体）积中的不可分量（平行线或平行面）全体。这就避免了无限的概念。自然就造成了理论上不可克服的矛盾。同时，卡瓦列利求积法还具有不注意代数和算术的纯几何缺点。1646年，托里拆利发表《关于无限抛物线》，

① 卡瓦列利确定图形间体积、面积关系的基本出发点是卡瓦列利原理（刘祖原理）：设两立体等高，若它们和与底平行并与底等距离的截面恒成比例，则此两立体体积之比等于这个定比。

用开普勒同维无限小量取代卡瓦列利低维不可分量，同时又保留了不可分量法在求积上的有效性，不但取得了曲线求积问题的许多成果，而且在理论上向近代积分靠近了一步。

费尔马于1636年提出了一个相当于近代定积分的积分法：用统一的矩形条分割曲线形；用矩形面积近似地代替曲边形面积；利用曲线方程求出矩形面积，并以其构成的几何级数之和近似地得到曲线面积；对和式取极限使近似值转化为精确值。而帕斯卡则采取等分 x 轴上的区间和略去无穷序列之和的高阶差的方法，这对牛顿、莱布尼兹产生了很大影响。费尔马和帕斯卡虽已触及问题的关键，但是他们却未抽象出积分概念及其运算方法。费尔马还将其积分法用于求弧长，他把曲线长视为微小线段长之和，再把线段长度之和转化为求曲线围成的面积来获得结果。

英国数学家沃利斯1656年发表《无穷的算术》，使卡瓦列利、费尔马的不可分法得到系统的推广。他用数的语言把几何方法算术化，使无限的概念以解析的形式出现，开辟了用级数表示函数的道路，使得无限算术代替了有限算术，这对确立微积分奠定了重要的思想基础。沃利斯还利用微分三角形，给出了近代意义的弧微分概念和计算公式：$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$，但未能给出弧长的计算方法。

到17世纪60年代，已是牛顿、莱布尼兹建立微积分系统理论的前夜。此时，求积法已取得十分丰富的成果，发展得相当完善了。

在微分概念与方法的形成过程中，作出主要贡献的有：

费尔马1637年发表《求最大值和最小值的方法》，他给出了求切线和求极值的统一方法，与现在的方法十分相似。应当说，这是微分方法的第一个真正值得注意的先驱工作。但是，他没有通过割线移动来决定切线，也没有通过计算斜率的极限来求切线。割线移动决定切线的思想，是笛卡尔1638年提出的。

英国数学家巴罗于1669年发表《光学和几何学讲义》，采用帕斯卡二十年代提出而沃利斯正在使用的“微分三角形”思想来求曲线的切线。微分三角形是指由自变量增量Δx和函数增量Δy为直角边所构成的直角三角形。巴罗第一个认识到$\frac{\Delta y}{\Delta x}$对于决定切线有重大意义，于是将微分三角形和费尔马的方法结合起来，从而得到比费尔马更优越的方法。实际上，巴罗已经接触到了微分的本质，因为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$可以用来决定导数。巴罗还第一个充分认识到微分是积分法的逆运算，这个重要发现就是所谓微积分基本原理。

由于历史的局限，上述数学家关注的是具体几何问题特有的解答方法，而未注意大量成果的优越性、创造性和普遍性能够提炼成新的统一的方法构成一门新的学科，也就是需要创立具有普遍意义的抽象概念、具有一般符号和一整套解析形式与规则的可以应用的微积分学。

1670年以后，牛顿和莱布尼兹分别以创造性的工作，沿着前人和同时代人所开辟的道路迈出了空前的一步。他们不理睬过去那一套论证方法而采用直观推断思维方式：不是根据严格证明来论证微积分的合理性，而是根据它内容完整、前后一致并且有多方面的应用，即作为一种容易驾驭的演算方法发展微积分理论，解决了建立概念（如变化率）、提炼出具有普遍意义的微积分方法、把概念和方法的几何形式改变为解析形式等三个重大问题，从而分别完成了创建微积分这场接力赛的最后一棒。

（2）牛顿的流数术微积分

牛顿小时智力一般，对读书无兴趣。后来觉悟奋发读书，在22岁时取得了英国剑桥大学学士学位。他在23岁这段时期内为近

代自然科学奠定了四个重要的基础：创建微积分为近代数学奠定基础；发明光的分析，为近代光学奠定基础；发现力学三大定律，为经典力学奠定基础；发现万有引力定律，为近代天文学奠定基础。莱布尼兹评价说："在从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中，牛顿的工作超过一半。"牛顿的老师巴罗是一位显赫的数学家，但一经发现年轻学生的才能后，便立即让贤，把自己的职位——剑桥大学路卡斯数学讲座教授让给年仅27岁的牛顿。

在前人成果的基础上和巴罗的启示下，牛顿于1665～1666年写出《曲线求积论》，扩大了求切线、求积的范围。这是牛顿对微积分问题的最初思考。1669年，他写出第一篇微积分学论文《项数无限的方程的分析学》，这是牛顿第一阶段工作的代表作，也是他创立微积分的标志。采用静态的无穷小量方法是牛顿此阶段研究方法的主要特征：把变量的无限小增量称做瞬，在运算中将式中各项除以无穷小量后再略去含有无穷小量的项。就得到了一个变量对于另一个变量的瞬时变化率。而且，他还证明了面积可以通过求变化率的逆过程得到。这就揭示了微积分的基本性质。例如，设一条曲线下面的面积为$Z=ax^m$（m为有理数），记横坐标x的无限小增量即瞬为o，面积增量即面积瞬为oy，则新面积为$Z+oy=a(x+o)^m$。等式右端用二项式定理展开并在等式两端同除以o之后再略去含有o的项，就得到$y=max^{m-1}$即是构成此面积的曲线。反过来，若曲线为$y=max^{m-1}$，则它下面的面积就是$Z=ax^m$。此外，牛顿还给出了不定积分运算的一些性质等许多成果。牛顿给出求瞬时变化率的普遍方法和面积与求变化率的互逆性证明，迈出了建立微积分的决定性步骤。

1670年牛顿以《流数术和无穷级数方法及其对几何曲线的应用》（在牛顿逝世之后的1736年出版）表明他的研究工作进入了第二阶段。此阶段的主要特征是创立了"变量流动生成法"。他

不仅引入了流数的概念和符号：流数是指流量（时间的函数）生成的速度（即变化率），若以x表流量，则以$\dot{x}$表流数，而且把变量视为由点、线、面连续运动生成的，故称变量为流，变量的变化率为流数。牛顿解决了由流量关系式$y=f(x)$求流数关系式$\dot{y}/\dot{x}$的微分问题，及其逆问题——由含有流数的方程求流量关系式的积分或解微分方程。牛顿的流数法举例：

设流量x、y满足关系式$y=ax^2+bx+c$，流量的瞬即无穷小增量为$\dot{x}o$、$\dot{y}o$，o表示无穷小的时间间隔。

若流量x、y经过无穷小时间间隔o变为：$x+\dot{x}o$，$y+\dot{y}o$，

则有 $y+\dot{y}o=a(x+\dot{x}o)^2+b(x+\dot{x}o)+c$，

将上式展开，消去$y=ax^2+bx+c$，等式两边同除以o，再略去含有o的项，即得

$$\dot{y}/\dot{x}=2ax+b$$

这里的$\dot{y}/\dot{x}$实际上就是$\dot{y}/\dot{x}$（也就是现在的dy/dx）。

牛顿明确指出流数法是一种有普遍意义的计算方法。

此外，牛顿发明了隐函数的微分法，无理函数的换元积分法，简单偏微分方程的特殊解法，以及用流数法求曲线的切线、函数的极值、曲线的拐点和曲率等。

但是，牛顿对为什么可以舍弃含“o”的项并没有给出符合逻辑的说明，瞬时变化率的概念也含混不清。所以，尽管所得的结果正确，其方法在数学上却是根本错误的。

为了摆脱实无穷小“o”，从而避免“略去含有o的项”的做法，牛顿在1676年的论文《曲线的求积术》和1687年的《自然哲学的数学原理》这部科学史上影响最大、荣誉最高的著作中，引进了初生量最初比与消失量最后比的概念而转向极限观点。他借助物理学的末速度和几何解释来说明最后比，指出最初比与最后比是极限，两种比值相等。举例说明如下：

求函数$y=x^n$的流数，设x的增量为o

于是，$(x+o)^n=x^n+nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2}+\cdots$

两边同减去x^n得x^n的增量为

$$(x+o)^n-x^n=nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2}+\cdots$$

从而得最初比

$$o:[(x+o)^n-x^n]=1:\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2}+\cdots\right)$$

令$o\to 0$时，得增量消失的最后比为$1:nx^{n-1}$。

这个最后比正是x的流数与x^n的流数之比，即x的增量与x^n的增量的比率。最后比实际上应用了极限思想。

牛顿关于最初比和最后比的方法是他第三阶段研究特征的体现，这无疑是对第一阶段无穷小量方法的否定。在这里，他不仅引入了导数概念，而且明确地把导数作为增量之比的极限。不过，他仍在无穷小与极限之间动摇不定，在«自然哲学的数学原理»第二版中，又更强烈地依赖于无穷小量，极限仅仅被含糊地隐含其中。这种动摇不定，表明牛顿本人亦感觉到他的流数术微积分尚有不完善之处。

牛顿创建的流数术微积分，不是出自逻辑的推导，他对数学概念的理解借助于物理直观，由于缺乏严格性而显得含混不清。他不仅完全用几何方式来叙述原理、定理，而且求流数时是“用魔术变掉”、“用暴力镇压掉”除流数以外的那些挡路的项，因而在“数学上正确的结果，是基于在数学上根本错误的假设”（马克思：《数学手稿》）。牛顿的微积分不可避免地有历史的局限性即所谓“神秘性”。

（3）莱布尼兹的无穷小微积分

莱布尼兹1646年生于德国莱比锡，自幼聪明、勤奋、谦虚、

好学，是罕见的"神童"。他18岁时获哲学硕士学位，20岁时获法学博士学位。莱布尼兹一生的大部分时间都作为一个巡回外交官。他是在和许多数学家的接触中学习数学知识并开始从事微积分研究的，其中对他影响最大的是荷兰数学家、物理学家、天文学家惠更斯。莱布尼兹在数学、地质学、力学、光学、哲学、法学、逻辑学、语言学、历史学、宗教、航海等广泛领域都有杰出贡献，尤以数学和哲学成就著名。在数学创造中，莱布尼兹充分表现了一个哲学家和逻辑学家的特色和优越性，他的单子论哲学体系，与他创建的无穷小微积分理论有着明显而深刻的内在联系。

莱布尼兹在微积分方面的贡献主要有：发现了微积分基本定理；给出了函数的和、差、积、商的微分法则，复合函数的微分法则，对数函数与指数函数的微分法则，弧微分法则；发明了在积分号下对参变量求微分的方法，以及求切线、极大极小值、拐点的方法；导出了曲线绕x轴旋转所成旋转体体积公式$V=\int \pi y^2 dx$；对曲率、密切圆和包络理论也作了研究。

莱布尼兹一开始就把微积分基本定理作为微积分运算的出发点，由此开展对微积分的研究。他创建微积分的工作主要是在1672～1695年。

1684年，莱布尼兹发表论文《一种求极大值与极小值和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》，以求函数的无限小增量为出发点，叙述了微分学基本原理。他利用帕斯卡的微分三角形，引入新的符号dx、dy，导出切线的斜率为$\frac{dy}{dx}$，从而创建了求$\frac{dy}{dx}$的算法。1686年，他发表著作《潜在的几何与分析不可分和无限》，从求以曲线为界的图形面积出发得到积分概念，引入了优越的符号$\int$，创立了逆切法，即今天所说的积分法。他由微分三角形所发生的联想，认识

到求和与求差问题是可逆的：求曲边梯形面积就是确定依赖于横坐标无限小区间上的纵坐标之和（无限小矩形之和），而求曲线的切线则是确定纵坐标与横坐标的差值（当差值无限小时）之比。在1666年前后的笔记中，莱布尼兹写出了独特而深刻的各阶差思想：

自然数：0，1，2，3，4，…　　y

一阶差：1，1，1，1，…　　dy

自然数平方序列：0，1，4，9，16，…　　y

一阶差：1，3，5，7，…　　dy

把这些与微积分联系起来，一阶差相当于dy，其和等于y，例如对自然数平方序列有

$$1+3+5=9$$

同样，在帕斯卡三角形①

```
1   1   1   1   1   1
  1   2   3   4   5
    1   3   6   10
      1   4   10
        1   5
          1
```

之中，每一个元素都是上面一行左边各个元素之和，又等于下面一行相邻左、右两个元素之差。例如：第二行中的3等于第一行前三个元素之和，3=1+1+1；又等于第三行第三个元素与第二个元素之差，3=6−3。

莱布尼兹把这种有限量的和、差互逆关系用于考虑无穷小量和、差运算。他指出，这种互逆性与求切线问题和求积问题的互逆性是一致的。因此，他用$\int dy=y$来表示序数差之和与函数差（纵坐标之差）之和，用$d\int x=x$表示序数或函数值之差。这样，

① 帕斯卡给出这个三角形是在1653年，而中国北宋时期的数学家贾宪早在1050年就以“开方作法本源图”给出，现称贾宪三角形。

莱布尼兹以完全不同于牛顿物理的、经验的途径，从几何的逻辑的角度把求和问题归并到了反微分，从而得到了微积分基本的、关键的思想：求积与求切线的互逆，微分与积分的互逆。以此作为基本点，莱布尼兹取得了微积分研究的丰硕成果，从中，我们可以看到一个伟大的才智所放射的灿烂光芒。

莱布尼兹还第一个试图定义微分，他指出"横坐标x的微分dx是一个任意量，而纵坐标y的微分dy则可定义为它与dx之比等于纵坐标与次切距之比的那个量"，即dy由

$$dy:dx=y:\text{次切距}$$

确定。这与现代的微分定义相仿。但是莱布尼兹的微分概念还是含混不清的："那个量"的具体特性是什么？他未给予明确的说明。而且，他时而把微分当作不确定的无穷小量，时而又当作有限的确定的差。

莱布尼兹认为无穷小不是简单的零、绝对的零，而是相对的零，它是一个消失的量，但仍然保持着它那正在消失的特征。无穷小分析，舍弃高阶无穷小，认为微分是实在无穷小量，这是莱布尼兹（牛顿没有）的一个重要思想。他认为没有必要把无限严格化；无穷大量和无穷小量"对于缩短论证和在一般叙述中是有用的虚构"，"正如在普通分析中使用虚根一样"，它们仅仅是为了使"表达方式更为直接，更适合于发明家的艺术"。这些观点，反映了他哲学上的局限性。

莱布尼兹深刻地把d作为一个"运算"，创造了优越的符号dx、dy、$\frac{dy}{dx}$、d^nx、$\int$、$\log x$等，成为以后解析学发展的巨大推动力。

莱布尼兹讨论了ddy，试图定义d^ay（a为任意实数），但未成功。

（4） 牛顿与莱布尼兹特点比较

牛顿和莱布尼兹从不同的角度建立了微积分。他们使微积分脱离了前期数学家的几何形式，成为可应用于一般函数的代数的普遍方法，打开了“通向数学王者的道路”。他们都把求积问题归并到反微分，揭示了微分与反微分的互逆关系，为求积运算开辟了简捷途径。而且，这两位创始人的局限性都在于没有明确弄清基本概念，对微积分基础的解释经常是含混和游移不定的。这里，有必要对他们的研究特点作一番简单比较。

牛顿的特点：由研究物理问题达到微分演算，微积分学的基本概念是力学概念的反映，如把变量看成是点、线、面作力学位移的结果。他把x和y的无穷小增量作为求导数的手段，当增量消失时，增量之比的极限即流数（导数），这表明了牛顿的物理方向。他强调并自由地用级数、特别是用二项式展开来表示函数。他认为选用什么符号无关紧要，关心的是创立微积分的体系和基本方法。工作方式是经验的、具体的、谨慎的，一些法则没有充分推广，对普遍性讨论较少。他担心微积分的严密性，认为微积分归根结底是纯几何的自然延伸。这种谨慎、拘束的作法，阻碍了他的天才的尽情发挥。牛顿探讨微积分的方法比莱布尼兹容易严密化。

莱布尼兹的特点：从切线问题入手，以哲学和几何学观点研究微积分。直接引进x、y的无穷小增量（即微分）dx、dy，找出它们的关系，拟制了整个微分法则和公式系统。dx和dy相当于他哲学中的单子，这表明了莱布尼兹的哲学方向。他强调用有限形式表示函数，把积分结果归结为代数函数或超越函数。创设了富有提示性的、反映事物本质的数学符号，成功地建立起科学的微积分符号体系和计算方法，是符号逻辑的先驱。他的工作方式是带思辨性的、富于想象的，善于提炼普遍的规则并大胆加以推广。莱布尼兹毫不犹豫地宣布新学科的诞生，对其严密性的不

足并不甚担心。莱布尼兹的微积分方法比牛顿更便于应用，更富于成果。

历史上，曾发生了众所周知的发现微积分的“优先权”的激烈争论。这是从1699年瑞士人丢里埃提出莱布尼兹剽窃了牛顿成果开始的。支持莱布尼兹的欧洲大陆数学家和维护牛顿的英国数学家分裂成两派，冲突激烈。结果，英国派固守牛顿的几何方法，使英国的解析学在18世纪脱离了数学发展的主流。而在大陆，贝努里家族和后来的欧拉继承莱布尼兹的传统，使微积分学及其应用得到了蓬勃发展。

事实是，牛顿在1665—1687年间的一些成果送给巴罗看过，但在1687年前并未发表。而莱布尼兹虽比牛顿稍迟发现微积分，但却比牛顿早三年发表首篇微积分文章（1684年）。他们完成微积分的功绩相当，各自有着不同的方向和特色。

（5） 中国古代解析几何与微积分思想萌芽

代数学是中国的创造（由西汉初年的《周髀》和《九章算术》等书中可知），“在16世纪以前，除了阿拉伯某些著作外，代数学基本上是中国一手包办了的”；“中国创造与发展了记数、分数、小数、正负数以及无限逼近任一实数的方法，特别是自古就有了完美的10进位值制的记数法，这是中国的独特创造，是世界其他古代民族都没有的。”（吴文俊：《中国古代数学对世界文化的伟大贡献》）直到14世纪，中国古代数学在许多领域中一直居于领先地位、宋元时期中国数学中有不少在世界数学史上领先几百年的成果。这些都是中外数学史学界所公认的，已是无可争辩的了。但一般人（特别是西方数学史家）认为解析几何与微积分纯粹是西欧发明的，乃属误解。对于这两个通向近代数学的伟大创造，“中国的古代数学决不是不起着重大作用（甚或还是决定性的作用）的”（吴文俊，同上）。

从历史来看，数学有两条发展路线，一条是从希腊欧几里得系统下来的以演绎为主的公理化数学；另一条是渊源于中国，影响到印度，再影响到西欧的数学。5世纪之后的印度数学大部分是中国式的，9世纪之后的阿拉伯数学大部分是希腊式的，10世纪中叶这两种形式的数学合流而传到欧洲各地，使欧洲数学汲取了具有极大优越性和生命力的中国数学，从而开始了它的近代发展。而且，中国数学不仅早就传入朝鲜、日本、印度，自唐宋以来随着经济、文化交流，中国数学对阿拉伯也产生了影响（例如十进位制、分数记法、百鸡问题、贾宪三角形及增乘开方法等都传入阿拉伯）。苏联著名数学家柯尔莫哥洛夫指出："中国数学和希腊、罗马、印度、中亚和中世纪欧洲的关系……是存在的，不少国家的数学手稿上，算题和数据恰恰与中国的原著相同。"中国著名数学家吴文俊指出："有理由可以进一步说：……决定数学历史发展进程的主要是中国的数学而非希腊的数学。"

古希腊几何学在它盛极一时之后，在大约一千多年里处于完全停滞的境地。而中国古代数学经汉代形成体系之后，在相当长的历史时期由相对保持平稳缓进到持续发展的状态，到13世纪宋元时代，达到了它的鼎盛时期。日本著名数学史家三上义夫指出："中国之算学，其发达已有二、三千年之历史。""以算学之发达，包含于如此之大文明中而有如此久长之历史，世界诸国未尝有也。"英国著名科技史专家李约瑟评论说，中国"在公元3世纪到13世纪之间保持一个西方所望尘莫及的科学知识水平"。

就世界范围而论，古代数学大致分为长于逻辑推理和发展计算方法这两种不同类型，这大体上代表了西方和东方两类数学的不同特色。近代数学的产生正是东西方数学融合的结果。与古希腊数学追求纯粹"理念"形成强烈的对照，中国古代数学具有浓厚的应用数学色彩，表现了鲜明的实用性。自西汉末期到元代中期的一千多年里，中国数学经历了由建树独立的学科到创立理论

体系的过程，形成了与西方数学迥然不同的风格——形数结合，以算为主，使用算器，建立一套算法体系；寓理于算，理论高度精炼及理论技术化的明显倾向等。这种以算为主的某些特点虽亦为东方的古代印度和中世纪的阿拉伯数学所具有，但中国古代传统数学在这方面更具典型性。中国古代数学没有公理、定理这些术语，演绎体系亦不很明显，它具有程序性、离散性、组合性、机械性等特征。特别是机械化的思想是希腊欧几里得体系找不到的，而这种机械化的思想与方法不仅有不可磨灭的历史功绩，而且在现代纯粹数学的研究中也一直发挥着它的作用（例如，20世纪法国著名数学家E·嘉当在研究微分方程、微分几何、李群时，经常显示出机械化思维的特色；H·嘉当关于拓扑学$k(\pi,n)$同调群的计算，堪称运用机械化方法的一个典范；著名数学家希尔伯特在其公理化方法的经典名著《几何基础》的最后一条定理中，实质上为某一类交点定理提供了一个机械化证明方法；吴文俊在中国古代数学机械化思想的启发下，从事机械化定理证明并取得了重大成果；……）。从前面的分析看来，解析几何与微积分实质上都是机械化思想而非公理化思想的产物。因而解析几何与微积分的发明，乃是中国式数学战胜了希腊式数学的产物。

中国古代数学的成就决不止于数系和代数学的创立，就是在几何学上也有过辉煌的成就。古代中国的几何学体系成果丰富、理论系统，抓住了几何学的核心本质，其中有许多内容是创立微积分的关键所在。除了与平行公设有关的公理外，其它欧几里得几何中的公理所表示的内容几乎全部都有；欧氏几何的拱心石毕达哥拉斯定理，早就以勾股定理出现于我国西汉《周髀算经》中，三国时的《勾股圆方图注》论证了勾股形三边关系的二十一个命题及定理，《日高图注》又应用它测日之高远一类复杂问题；在微积分创立过程中起过重要作用的卡瓦列利原理，南北朝的祖暅在刘徽《九章算术注》基础上就已概括成“刘祖原理”：“缘幂势

既同，则积不容异”，比卡瓦列利约早1100年。这方面的实例还多，在此不逐一举出。

中国古代的几何命题一直用代数形式来表现。“形数结合”突出地表现为几何方法与代数方法相互渗透——一方面，算术与代数学中许多理论和方法（例如比率算法，高次方程数值解法等)在几何学领域中广泛应用，表现了几何的代数化倾向；另一方面，几何的原理与方法又被成功地用于代数、数论等领域（例如开方术、整勾股数一般公式等都源于几何）。古代中国数理天文学和地图学中表示上体位置的经纬度法（战国时代）和表示地理位置的方位法（西晋），以及列表法、网格子作图法等，说明已发现了坐标表示法和几何与代数的对应关系，当然这只能是孤立地考察单个点的数值坐标，而非解析几何中考察一系列变动着的点这种变数之间的一一对应关系。宋元时代创立了“天元术”和“四元术”一类理论和方法，明确引入了未知数概念，把几何问题化为代数高次方程求解。中国古代数学自始至终把空间形式与数量关系融合一起，代数学与几何学贯串在一起发展，正是把形数割裂的希腊几何学的不足之处。

笛卡尔在一般坐标概念和变数的引入以及在解析几何上的其它发明创造有着划时代的功绩。但笛卡尔一无坐标系统，二无正负线段，更无所谓直线与曲线的方程，他的主要贡献在于代数的几何应用与几何的代数化，把几何图形表达成代数解析式，因而为研究物理世界提供了数量工具。解析几何的产生过程有三个主要阶段：一是发明坐标系统作为描述问题的工具；二是几何与代数间一一对应的认识；三是系统与结构的转化，即函数$y=f(x)$的图形表示。前两个阶段分别属于古代和中世纪，笛卡尔所作出的真正进展在于第三阶段，把几何问题化为代数形式而使用代数机器求解（当然，把代数方法、几何内容及坐标概念有机地结合于一起的关键是变量）。而这种代数的几何应用与几何的代数化

正是“天元术”的主要含义之一。天元术以勾股重差一类问题作为立术的主要来源，以天、地、人、物等元代替所求线段，以这些元（未知数）组成的代数式来表示几何图形的长度、面积，根据圆与直角三角形中的若干几何定理作为运算即建立天元式（列方程)的根据，然后运用相应的代数机器求解。这些正是笛卡尔创立解析几何的决定性的一步。因此，标志着未知数概念的引入、代数式与其代数运算的阐明、以及几何代数化方法逐渐成熟的“天元术”，为解析几何的创立开辟了道路。

那么，为什么解析几何没有产生在中国古代呢？

如前所述，解析几何的基本思想是用代数方法研究几何问题。其首要问题是找出方程所表示的曲线或者如何用方程表示曲线。方程的未知数既可表示某一个具体的数值，更重要的是表示一个连续变化的变量。变量概念与函数概念紧密联系，是解析几何的一个关键概念。中国传统数学虽然一直保持着代数与几何密切配合的特色，但用代数方法解决几何问题时从来都是把方程中的未知数作为一个具体的数值或具体的几何量，所谓变量也只是单独的一个趋于常量的变量。这与解析几何中的方法和概念还存在有很大的差别。

其次，中国古代虽然早就有了坐标表示法，但与解析几何引入曲线上变动的点与有序数对一一对应关系的坐标概念还有质的区别。它只是给出孤立的点的数值坐标，因而得不到曲线的轨迹。函数$y=f(x)$的坐标表示法自然就未被发现。

第三，费尔马和笛卡尔是从研究阿波罗尼乌斯的圆锥曲线理论开始来研究解析几何的。这既是对希腊数学特别重视几何理论与几何图形性质的研究这个传统的继承，又是当时科学技术向数学在新的高度上提出的新课题。坐标、变量等新概念和解析几何的新方法的出现便是这种研究的必然结果。但中国古代数学在用代数方法解决几何问题时，则偏重于长度、面积和体积等度量为

主要对象，而不注重图形性质和位置关系的研究。希腊圆锥曲线知识直至明末清初才经传教士传到中国，但中国数学家却只限于计算这些曲线的面积、长度，而对曲线的性质和表示方法则几乎没有触及。

于是，中国古代数学只达到解析几何的大门，而未使之产生于代数与几何相结合的三国时代，也未产生于希腊数学传进来后的明末清初。这是与中国传统数学思想和数学方法的局限性有关系的。

解析几何思想在中国产生，已经是19世纪40年代清末之时了。它主要体现在李善兰所创造的无限小方法——“尖锥求积术”中。尖锥术是在垛积术和传统的极限思想的基础上创立起来的一种微积分方法。它的基本思想是将待求积的图形分成无限多个特定的尖锥，然后计算各尖锥积的总和。它的求积法相当于幂函数的定积分公式

$$\int_0^h \left(\frac{a}{h}\right)^p x^p dx = \frac{1}{p+1} a^p h$$

和逐项积分法则

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\int_0^h \left(\frac{a}{h}\right)^p x^p dx\right) = \int_0^h \left[\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{a}{h}\right)^p x^p\right] dx$$

在其应用过程中，已经具有了解析几何思想。尖锥，是一类处理代数问题的几何模型，它的底线和高线互相垂直，若以尖锥的顶点为原点，那么就可当作平面直角坐标系了。它的尖锥曲线是由随同乘方数(x^n)一起渐增渐迭的底线和高线所确定的点变动而成的轨迹。李善兰把每一条尖锥曲线视为无穷幂级数中相应的项，实际上就给出了直线（长方、平尖锥）、抛物线（立尖锥）、立方抛物线(三乘尖锥)……等曲线的方程。同时，还给出了等轴双曲线(数合尖锥曲线)方程。李善兰把幂级数的各项用尖锥曲线

表示，作出了幂函数的图象，并指出："乘愈多，则凹愈甚"。显然，这无疑是在用已知代数方程求几何曲线，并根据方程的代数性质来研究相应曲线的几何性质。遗憾的是，尖锥术没有几何的代数化方面的内容。同欧洲微积分准备阶段的工作比较，李善兰的尖锥术很接近卡瓦列利和罗伯瓦的不可分量法。他独立地得到了相当于幂函数定积分公式和逐项积分公式，以及三角函数、反三角函数的幂级数展开式，特别是他所设计的对数运算，通过尖锥合积与对数的对应关系递推出ln2、ln3…的数值。

李善兰的尖锥术完成于西方数学中的解析几何与微积分尚未传入中国的1845年。在尖锥术的基础上，解析几何与微积分思想的萌芽是能够以中国方式成长起来的。

下面述评中国传统数学与微积分的关系。

如前所述，微积分的产生一般分为三个阶段：极限概念；求积的无限小方法；微分与积分的互逆关系。最后一步是由牛顿、莱布尼兹完成的。前两阶段的工作，欧洲的大批数学家一直追溯到古希腊的阿基米德都作出了各自的贡献。对于这方面的工作，古代中国毫不逊色于西方，微积分思想在古代中国早有萌芽，甚至是古希腊数学不能比拟的。

斯科特的《数学简史》(Scott, A History of Mathematics, 1958) 指出："极限的概念，作为微分学的真正基础，对于希腊头脑来说完全象是一个外国人。"

中国在公元前14世纪殷商时代已有十进数字。魏晋时期大数学家刘徽到宋代的十进位小数记数法，与极限概念一衣带水。但西欧迟至16世纪才得以发明后，又直接导致了对数的发明。

公元前7世纪老庄哲学中就有了无限可分性和极限思想，公元前4世纪《墨经》中有了有穷、无穷、无限小(最小无内)、无限大(最大无外)的定义和极限、瞬时等概念。

刘徽于公元263年首创割圆术求圆面积和方锥体积，运用穷竭

法求得$\pi=3.1416$，他的极限思想和无穷小方法，是世界古代极限思想的深刻体现。关于卡瓦列利求积的不可分量思想和方法，从刘徽对圆锥、圆台、圆柱的体积公式的证明到公元5世纪末祖暅求球体积的方法中都可找到。

北宋大科学家沈括的《梦溪笔谈》（约公元1086年）在数学方面独创“隙积术”、“会圆术”和“棋局都数术”，还提出一些具有运筹学思想的实例。隙积术实际上开创了中国对高阶等差级数求和的研究。

南宋大数学家秦九韶于1247年撰写划时代巨著《数书九章》十八卷，创举世闻名的“大衍求一术”——一次同余式组解法和理论及“正负开方术”——增乘开方法解任意次数字（高次）方程的近似根，比西方早五百多年。科学史创始人、美国著名学者萨顿高度评价秦九韶是“他那个民族，他那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一”。

元代大数学家朱世杰1303年在其伟大著作《四元玉鉴》中，创“四元术”建立了四元高次方程组理论（高达15次27项的方程），并发展了隙积术、堆垛术和四次内插法，解决了高阶等差数列求和计算的问题。朱世杰关于解方程组的“消法”是中国数学史上一项杰出的成就。在西方，关于方程$f(x, y)=0$，$g(x, y)=0$消去一个未知数的方法，直到1779年出版的法国数学家别朱著《代数方程的一般理论》中才正式出现。朱世杰使用算筹取得的垛积招差即有限差分学以及四次内插法这样了不起的辉煌成就，在世界数学史上亦堪称独步，他是世界上最早全面地研究函数序列、差分系数、各次和之间相互关系的数学家。而在西方，用与朱世杰相同的方法处理级数问题到17世纪才出现。朱世杰使中国在代数领域里开创了遥遥领先的局面。李约瑟博士在《中国科学技术史》中盛赞朱世杰是“中世纪数学家当中最伟大的”。

总之，中国传统数学经汉唐以来千余年的发展，到北宋至元

中叶约四百年间，特别是从13世纪40年代末到14世纪初这五十多年间，在主要领域都达到了中国古代数学的高峰，出现了现通称贾宪三角形的“开方作法本源图”（二项式定理系数表）和增乘开方法（高次方程一般解法）、“正负开方术”（高次方程数值解法）和“大衍求一术”、“大衍总数术”（一次同余式组解法）、“垛积术”（高阶等差级数求和）、“招差术”（高次差内插法）、“天元术”（建立数字高次方程的一般方法）、“四元术”（四元高次方程组的布列和解法）、勾股数学、弧矢割圆术、组合数学（幻方）、计算技术的改革及珠算等在世界数学史上都有重要地位的杰出成果。中国已具备了西欧17世纪发明微积分前夕的全部内在条件，已经接近了微积分的大门，其中许多内容是微积分得以创立的关键。但是，中国数学与微积分准备阶段的欧洲数学具有相似的形势，则于18世纪下半叶至19世纪上半叶才出现，中国数学家正沿着一条独特的途径逼近近代数学的大门。例如，焦循（1763～1820）、汪莱(1768～1813)、李锐（1768～1817）在代数学方面关于高次方程根的个数和系数正负符号变化次数的关系的研究，特别是李锐的《开方说》对方程理论、符号法则、重根问题等作了深刻的论述，得到与笛卡尔符号规则相同的结论。明安图（1692？～1763？，《割图密率捷法》)、董佑诚(1791～1823)、项名达(1789～1850)、戴煦(1805～1860)、李善兰(1811～1882)等人对三角函数的幂级数、对数函数的幂级数、二项式平方根等进行了卓有成效的研究。明安图的工作与欧洲数学家的同类工作（为幂级数中的台劳公式）在时间上和质量上都很接近。特别是李善兰创立的尖锥术以及在贾宪三角形的基础上编著了《垛积比类》四卷，前者具有解析几何思想与微积分方法，后者论述了递归函数、组合函数及计数函数等，归纳推导出驰名中外的“李善兰恒等式”等若干属于组合数学的定理和公式。这些中国数学家的独立创造，表明了中国古代传统数学有可能以自己特殊的方式

步入近代数学的殿堂。西方近代数学涌入中国，始于19世纪50年代鸦片战争后。20世纪初，中国传统数学终于汇入世界近现代数学发展的潮流之中。

那么，并没有西方长达千年黑暗的中世纪的、长期居世界领先地位的中国古代传统数学，为什么在常量数学的圈子里徘徊迟滞竟达两三千年之久而没有实现欧洲那样由常量数学向变量数学的飞跃呢？16世纪以后欧洲数学突飞猛进，把（元末至清中的）中国数学远远抛在后面，近代中国数学落后的原因何在？

在前面，我们已经评述了中国古代传统数学的一些特点以及为什么解析几何没有产生于中国的原因，也分析了中国传统数学所具有的微积分基础。我们自然会提出这样一个问题：14世纪之后，中国数学为什么出现中断现象呢？我们试从社会条件和自然科学基础等“外因”以及中国传统数学本身的弱点这个“内因”作扼要分析。

微积分学的产生，除了数学基础之外，还应包括社会条件和自然科学基础。中国古代传统数学有了微积分前两个阶段的出色工作，但并不完全具备了产生微积分学的全部条件，还需要社会条件和自然科学基础。以牛顿和莱布尼兹创建微积分的工作可看到，他们是分别从研究物体运动的速度和研究曲线的切线这两条不同途径得到导数的。他们的共同点就是用变化的观点，引进变量，研究变化着的运动，这是当时自然科学蓬勃发展，特别是力学、运动学的发展向数学提出的要求。这时在数学运算中引入无穷小量方法，不仅是逻辑推理的结果，而且是当时社会发展与科学技术进步的要求在数学方法上的反映。中国元朝以后，有许多不利于数学也不利于科学发展的社会因素。八股取士制完全取代了数学考试制度，对数学是一个沉重打击，造成了学术上的大倒退。封建统治阶级对知识分子实行歧视、压迫政策，实行盲目排外和文化专制，致使包括数学在内的科学日渐衰落。正是由于缺

乏社会和自然科学的动力，中国古代数学才没有具备创立微积分最后的也是最关键的一步所需的外部条件。

中国古代传统数学有其自身的历史渊源和独特的发展道路，也有其弱点和局限性。中国古代传统数学不注重概念的严格定义，不注重理论体系的完备性，不注重用逻辑推证把演算推向更高一级的水平，这是14世纪后中国数学中断的一个重要原因。13世纪天元术、四元术取得了重大成果，但却没有通过提出新概念和新的论证方法进行更高层次的理论概括，从而取得新的突破，这就发生了中断。中国古代数学对问题的陈述主要用文字写出而没有较先进的符号系统。筹算数学用"位"来区别不同的量，用上、下、左、右各种相对位置关系来表示特定的数量关系，远不如欧洲后来发明的字母代数和运算符号方便和广泛，能够深刻地表达概念陈述、逻辑推理和定量计算，而带有原始的不完备性质。这就妨碍了中国古代传统数学方法与理论进一步的抽象化，束缚了数学的发展。朱世杰的"四元术"用天、地、人、物表示四个未知数，置于上、下、左、右四个方位，如果有五个未知数就无法放置，更不可能推广。"天元术"、"四元术"能解数字方程，但要研究方程的根与系数的关系，使方程一般化，就必须有表示任意常数的符号。筹算数学发展到13世纪时已达顶峰，必须突破筹算限制，向符号代数转化，但却因没有较先进的符号而错过了这个契机。同时，由于数学对社会极强的依赖性，往往囿于经验，满足于实用，因而使它的理论未能得以充分发掘，甚至许多重要成果都失之交臂。例如，勾股定理与开方术早为中国发明，并认识到不尽方根不能用分数精确表示。但因中国传统数学未形成严密的演绎体系，理论之间缺乏紧密的联系，也就未能发现无理数的概念。另外，算经只讲算法，而算理只能口授师传或通过注释才能获了解，计算过程不能留下痕迹，这就不便于数学理论的流传和发展，研究成果易于埋没湮灭（例如公元5世纪祖冲之

计算出π值为$\frac{355}{113}$，比德国人奥托早11个世纪。但是他那可能是非常重要的方法却失传了）。然而，上述弱点和局限性并非决定性的因素。中国长期停留在封建社会，封建制度的腐朽使中国缺乏象欧洲16世纪以后对科学技术那样的社会推动力，是明清以来近代中国数学逐渐衰退落后的根本原因。实际上，包括近代数学的近代自然科学要是在中国产生的话，较大的可能性是产生于明朝中叶。这个时代出现了资本主义萌芽，出现了类似弗兰西斯·培根(F.Bacon，1561—1626，英国科学家、哲学家)这样的大科学家徐光启(1562～1633)，他在天文学、农学、水利学、测量学和数学等方面都有杰出贡献。他翻译了欧氏《几何原本》并接受了欧氏逻辑推理思想，他的科学思想和科学方法远比宋元理学的思想和方法更高明、更接近于伽利略。但因明朝封建统治者在学术上推行一系列反动措施，徐光启的科学思想和方法受到压制而未能传播开，资本主义萌芽也由于封建统治者的高压政策而枯萎，使自然科学的发展缺乏足够的社会推动力。因而不可能实现数学与科学在性质上全新的近代结合，不可能实现由常量数学向变量数学的飞跃转变。而欧洲却捷足先登，在冲破中世纪的黑夜之后，资本主义的兴起刺激自然科学以意想不到的神奇速度发展，近代数学伴同近代自然科学终于发生在伽利略、牛顿等人为代表的时代。

第 二 章

18世纪：近代数学的发展期
——分析学的兴起

牛顿、莱布尼兹创建的微积分，由于理论基础存在着明显的内在矛盾，引起人们对它的可靠性、合法性、有效性产生了怀疑。尽管一些数学家提出了一些新的概念和方法，试图克服微积分方法的不严密性，但在17世纪并未引起普遍重视。数学家只是忙于追求成果和用新的方法去解决科学技术的实际问题，把微积分松散地推向前进。

18世纪数学发展有三个特点：(1) 在物理学、力学、天文学的推动下，创立了许多数学分支，但大都未形成严密、系统的理论；数学分析的方法逐步代替了传统的几何论证法，与力学有关的分析学成为数学发展的中心和主流。(2) 但是，根本的观点和方法完全跟17世纪一样，对传统观念缺乏彻底的批判精神。微积分基础严密化有了相当的进展，但未取得决定性突破。(3) 微积分的发展主要表现在加深扩大了对函数概念的理解，发展了各类函数的积分方法和多元函数的微分。数学的主要成果还集中表现在无穷级数、常微分方程、偏微分方程、变分法、概率论、微分几何、解析几何以及数论上。

I．分析学的主要成就

（1）贝努里家族对微积分的传播、发展

莱布尼兹的无限小微积分由于具有符号的优越性，因而很快在欧洲大陆传播开来。瑞士的贝努里兄弟把莱布尼兹零碎的、梗概性的文章进行加工和解释，并加以创造性发展，是使微积分在欧洲大陆得到正确评价和迅速传播贡献最多、影响最大的数学家。

在莱布尼兹的协助下，约翰·贝努里对微积分的形式、内容的改善和应用范围的扩充方面取得了极大的成就，促进了微积分学的定型和某些原理的建立。在函数理论中，他于1718年首次从解析的角度定义函数，提出函数可借助于常量和变量用解析式表达出来即以Φx表示x的函数。改变了在此之前只有几何解释的现象。他还把牛顿关于级数的应用扩展到了积分复杂的代数函数和超越函数，并用级数求曲线长和区域的面积，确定曲线族的正交轨线。他研究了齐次微分方程和一种线性微分方程(贝努里方程)以及常系数方程的解法。在研究“$\frac{0}{0}$”型的极限时，他提出了一个法则（即所谓的洛必塔法则）。他于1702年引入求不定积分的变量换元法和部分分式方法，从而大大扩充了可积函数的范围。最值得注意的工作之一是，约翰·贝努里和他的哥哥雅各·贝努里在最速降线问题上的贡献，即确定在重力场中两个给定的（不在同一铅垂线上的）点间运动的无初速的重质点最快滑降之曲线是摆线的一段弧，它也是等时曲线的解。最速降线问题是约翰1696年向同时代数学家提出的挑战，在历史上曾引起了牛顿、莱布尼兹、洛必塔以及欧拉、拉格朗日等许多数学家的研究兴趣。

从而导致变分法这门数学分支的创立和发展。

雅各·贝努里在数学上几乎是无师自通。他广泛地采用莱布尼兹的新方法并加上自己的创造，讨论了最速降线问题，柱面、锥面和旋转面上的测地线问题（这是导致变分法发展的第二个问题，即确定曲面上两定点间长度最短的曲线），以及对数螺线、悬链线、双纽线等一系列与几何、力学有关的微积分问题．发现了一些原函数不属于初等函数的被积函数，例如引出了积分

$\int\frac{x^2+ab}{\sqrt{a^4-(x^2+ab)^2}}dx$和弧长积分$S=\int_0^r\frac{a^2}{\sqrt{a^4-r^4}}dr$。雅各还最先发现调和级数的发散性。他和约翰还对曲线的曲率、拐点、曲线法线的包络等许多微积分基本课题做出了创造性贡献。雅各还是近代概率论的创始人之一。他撰写的近代概率论第一本专著《精度术》（在他死后 8 年即1713年才发表），发展了许多新方法，例如用无穷级数解决赌博中的概率问题，首创差分方程法彻底解决直线上的随机游动问题。特别是给出了具有重要应用的“贝努里分布”和难度很大的“贝努里大数定律”的陈述和证明。贝努里大数定律曾使雅各费时20年之久，它使概率论开始成为一门统一的数学理论。

贝努里家族在大约一个世纪内，涌现杰出的数学家达 8 人之多，是在微积分及分析学发展史上起过重要作用的一个家族。例如，雅各·贝努里的侄子丹尼尔·贝努里所提出的具有特别重要应用价值的“逆概率问题”，引致概率论研究学者长期争论不休，直至20世纪30年代费歇尔才给以坚实的基础。但当代科学哲学家仍还对“概率逻辑”存在很大分歧。丹尼尔的堂兄尼古拉·贝努里也提出了数学史上有名的“彼得堡赌博”问题，这个引起许多早期概率论学者研究的关于概率论数学期望的悖论，直到19世纪才由普阿松给出较为令人满意的解答。

（2） 欧拉在分析学方面的卓越贡献

18世纪数学界的中心人物，是最多产的瑞士学者欧拉。他堪称与阿基米德、牛顿、高斯和爱因斯坦并列的世界上少有的大科学家。他的工作涉及数学各个领域，他把由贝努里家族继承下来的莱布尼兹学派的分析学内容进行整理，为19世纪数学的发展打下了基础。

欧拉从18岁开始发表论文，每年以800页的速率发表高质量的独创性研究成果，一生中有74卷著作（共886本书和论文，全集比全部英国百科全书的页数还多。彼得堡科学院为了整理他的著作，竟足足忙碌了47年），其中许多书和400篇论文是在他双目失明后的最后17年写成的。

1728年，欧拉在解高阶微分方程时引进指数函数，为高阶微分方程的求解开辟了道路。1744年，欧拉发表名著《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》，标志变分法这门数学分支的诞生。这本书收集了他1736年到1744年间关于变分法最小作用原理和一般求解问题的研究成果。他运用变分法技巧把最小作用原理用于单个质点沿平面曲线运动的情形，指出对路径改变的积分，其变化率必须为零。但是什么是积分的变化率？欧拉还不够明确。他在1736年证明了使积分$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx$取极大或极小值的函数$y(x)$必须满足欧拉方程$f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})=0$的基础上，对大量复杂问题求得了类似欧拉方程的微分方程。但是，由于欧拉在《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》中广泛使用几何论证，因而没有提供系统的一般方法。

1747—1774年，欧拉发表《无限小分析引论》、《微分学》、《积分学》等著作，在数学分析、微分方程、椭圆函数论、变分法和数论等领域作了开创性研究。他在《无穷小分析引论》中

深入讨论了函数概念："变量的函数是一个解析表达式，它是这个变量和一些常量以任何方式组成的。"并相应地提出了代数函数和超越函数的概念，定义了多元函数，对显函数与隐函数、单值函数与多值函数作了区分。欧拉在这里把函数概念作为分析学的基础。他在1734年引进了函数记号$f(x)$。在1738年以累次积分的办法解决二重积分计算的基础上，欧拉于1769年明确表述了二重积分的概念以及化二重积分为二次积分的方法。欧拉是18世纪对无穷级数研究得最多的数学家，他把无穷级数与有限项多项式等量齐观地进行运算，得到的结果多是有意义的，但也感到对发散级数是困难的。他还研究了调和级数，得到了公式$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\log(m+1)+C$，$C$为欧拉常数。他引入的级数变换$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$（其中$\Delta^n$表示$n$阶有限差分），给无穷级数研究指示了方向。他又将关于插值问题的方法用于天文学研究中，从而导出了函数的三角级数表示。在微分方程方面，欧拉导出了著名的位势方程$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=0$，并提出了恰当方程的概念(1735)。1728年，欧拉采用变量替换将二阶方程降为一阶，标志着对二阶方程开始了系统研究。他还提出了特征方程和特征根的概念，把高阶常系数齐次线性方程的求解化为代数方程的求解，对非齐次情形则采用降阶法。1750年，欧拉在法革那诺（Fagnano，1682～1766）关于椭圆积分工作的基础上，导出了一般的第一、二类椭圆积分的加法定理和椭圆积分$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$的欧拉乘法定理。他通过研究力学问题提供了偏导数的运算方法，发展了多元函数的偏导数理论。他把分析法引入数论，奠定了解析数论的基础，在"完全数"（所有比自身小的因数之和等于自身的正整数）、"亲和数"

（古希腊毕达哥拉斯提出的用来指一对正整数彼此等于对方的所有因数之和）、素数、丢番图分析和二次型等方面，取得了深刻的对数论的发展起着导向新天地作用的成就。欧拉还在曲线曲面的解析几何与微分几何的创立和发展上留下了先驱的业绩……

总之，在数学的大多数分支里都可找到欧拉的名字——欧拉公式、欧拉常数、欧拉积分、欧拉多项式、欧拉线、欧拉定理等等。在物理学、力学、化学的领域里，他也几乎是无所不及而且贡献卓越。在失明后，他还解决了曾使牛顿头痛的“月离问题”及其它许多复杂问题。法国大数学家拉普拉斯常常对年轻数学家说：“谈谈欧拉，这是我们一切人的老师。”属于19世纪的大数学家高斯评论道：“欧拉的工作……没有任何别的可以替代它。”

（3）达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯对分析学的贡献

18世纪的后半期，法国数学的发展最为惊人。活跃在巴黎的数学家、力学家、哲学家达朗贝尔，早期研究法律，后来从事医学和自然科学的研究。他在数学史上的功绩，并不只在于他首次把极限理论作为微积分的基础而试图为微积分作出严格证明，而且他在级数理论、复变函数论、微分方程和代数学等方面都有杰出贡献：发现了正项级数收敛的判别法；首次运用复变函数于实际，解决了流体力学中的一个椭圆型偏微分方程，并和欧拉发现了复变函数可微条件（即柯西黎曼条件）；推广了偏导数的运算，得出了表示弦横向振动的二阶偏导微分方程的解法，1747年出版的振动弦索理论，使得他与欧拉、丹尼尔·贝努里共同成为偏微分方程论的创始人；在相当大程度上促进了常系数微分方程和一阶、二阶线性方程组理论的发展；给出了代数学的“达朗贝尔辅助定理”即首次不完全严格的代数学基本定理的证明。这位靠自学成才的数学家，是法国科学界声望很高、影响很大的人

物。

拉格朗日是法国数学家、力学家、天文学家。他17岁在哈雷的《分析方法的优越性》一文的影响下开始从事数学分析的研究，19岁就因成绩卓著任都灵皇家炮兵学校教授，先后当选为柏林、法兰西、彼得堡科学院院士。拉格朗日的研究工作几乎涉及数学、天文学、力学等在当时科学发展中最敏感、最突出的各种问题，在数学研究上，他总是穿插地进行对各个分支的研究。除几何之外，对当时所有数学分支都作出了重要贡献，其中以在微分方程中的成果最为丰富。他是18世纪后半叶至19世纪初最伟大的数学家之一，也是18世纪科学的象征。

拉格朗日最早的工作是对变分法的贡献，他是受欧拉工作的启发而开始对变分法研究的。欧拉使用的是几何方法，他企图把几何与分析结合起来，结果未如人愿没有成功.1754年，拉格朗日舍弃了欧拉的几何方法，创立了求积分极值问题的纯解析的一般方法，第二年对此方法进行了系统的总结，并写信告知欧拉。拉格朗日所建立的一般方法适用范围很广的一类问题，他通过两个端点（x_1，y_1）和（x_2，y_2）引入新曲线使积分$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx$极小化或极大化。他引进特殊符号$z$来表示整个曲线$y(x)$的变分，把那些新曲线表示为$y(x)+zy(x)$。$J$的值随被积函数中引入新曲线而变化，它的增量为$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2}[f(x,y+\delta y,\ y'+\delta y')-f(x,y,y')]dx$。拉格朗日导出了要使$J$取极值的条件是$y(x)$必须满足欧拉微分方程$f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})=0$。后来，他又重新改造了二次变分$\delta^2 J$的形式，得到了类似于微积分中函数极值取决于$f'(x)=0$的$x$值处$f''(x)$的符号（假设$f''(x)$是存在的情形）的结果：对满足欧拉方程且经过两端点（x_1，y_1）和（x_2，y_2）的

曲线$y(x)$取极大或极小值的必要条件是在$y(x)$上的任意一点有$f_{yy'} \leqslant 0$或$f_{yy'} \geqslant 0$。拉格朗日还将变分法用于动力学，他不仅首次将最小作用原理用具体的数学形式表示出来，而且用此原理和变分法导出了著名的运动方程、"广义的"动力学方程。他所引入的广义坐标概念及其理论和方法所能描写的物理系统远比牛顿的经典力学广泛得多，成为现代理论物理学的有力工具。这使拉格朗日得以在欧拉工作的基础上创立了分析力学，他的巨著《分析力学》较之牛顿的《自然哲学的数学原理》，在力学的数学分析化方面取得了长足进展。《分析力学》的基础是与变分法密切联系的远比最小作用原理出色的"有效速度原理"，它给出了力学统一的基础。总之，拉格朗日的纯解析的变分法，不仅充满了创造性发现，而且把历史材料进行大胆取舍，融汇得相当出色。表现了数学史上第一个真正的、纯粹的分析学家的特点。直到19世纪，德国数学家雅可比在1837年才提出了强化拉氏必要条件的关于充分条件的准则。德国数学家维尔斯特拉斯1872年批评了欧拉、拉格朗日、雅可比所得结果的局限性，并引入强、弱变分概念以及E函数，得到积分J存在极值的充分条件。这个充分条件证明的极大简化，归功于德国数学家希尔伯特1900年创立的不变积分理论，由它可导出强变分的充分条件。

由变分法而派生出对被积函数具有高阶导数的单重和多重积分的研究，拉格朗日在讨论天体力学时首次引入三重积分概念，在利用直角坐标系计算碰到困难后，迅速转向利用球面坐标计算，从而开创了多重积分变换的研究。

拉格朗日不但用分部积分法讨论了任意阶的普通仿射方程的积分法，而且在二阶常微分方程方面对求解一般的二阶常微分方程有着重要应用的"黎卡堤（Riccati，1676—1754）方程"的解法进行了探讨，同时还提出了所谓拉普拉斯型函数。这是他在研究流体力学时所作的似乎是以很随便的方式进行的探讨。他还

对高阶微分方程——齐次、非齐次的常系数微分方程和变系数微分方程研究做出了重要推进：得到了齐次方程的通解由特解乘以任意常数相加而成的结论；如果已知 n 阶齐次方程的 K 个特解，就可把方程降低 K 阶；对变系数情形，提出了伴随方程概念，并发现非齐次常微分方程的伴随方程是原方程所对应的齐次方程。他发现了解高阶微分方程的参数变值法，并将此法应用于解高阶方程组。围绕平衡位置只作无限小振动的质点系统的运动引导，他研究了线性微分方程组，又一成果是在求解这组方程的积分时首次清晰地提出了线性变换的特征值概念。他系统地讨论了奇解与通解的关系，给出了从通解中消去常数而得奇解的漂亮方法，特别是给出了奇解是积分曲线族的包络的几何解释。拉格朗日在微分方程和偏微分方程研究上的成就是十分出色的，他在《一阶偏微分方程的积分》（1772）和《微分方程的特定积分》(1774)中，首次提出非线性一阶方程的一般理论，给出了化一阶非线性方程为线性方程的方法。详细讨论了一阶偏微分方程的完全解、通解与奇解之间的关系。通过对齐次方程求解来获得非齐次方程的解，这种完整的解一阶线性微分方程的方法是1779年给出的。拉格朗日的工作，使得偏微分方程在18世纪有了唯一的系统的理论。拉普拉斯赞叹拉格朗日的工作是“主题重要、方法漂亮、手法精明的分析学家的杰作。”

1767—1777这十年中，拉格朗日着手处理了数值方程的解法、Iittèrls方程的级数解法、代数基本定理的证明、二次方程无理根是唯一的用循环小数连分数表示的数、方程的虚根形式等许多代数方程的重要问题。他在1771年发表的《关于方程代数解法的思考》，达到了方程理论研究的顶峰。虽然他未能彻底解决四次以上方程的代数解法问题，但他展示了代数方程当次数大于4时的不可解性，提供了彻底解决问题的基础。特别是他引进对称多项式理论、置换理论和预解式理论，并深刻指出根的排列理论

是“整个问题的真谛”，这就为19世纪伽罗瓦建立置换群理论并一举攻克五次方程问题奠定了坚实基础。

拉格朗日对他认为具有奇妙性质和艰深难度的数论也作出了一系列杰出贡献。费尔马曾于1657年断言Pell方程 $x^2-ay^2=1$(a为任意非平方的正整数）有无穷多整数解，欧拉1765年把$\sqrt{a}$表示为连分数求解但未证明方程平凡解($y\neq0$)的存在性。拉格朗日1768年用连分数算法证明了方程解的存在性：只要x、y和a是正整数，a不是完全平方数，$y\neq0$，则Pell方程总是有解的。后来，他又给出一个非试验性理论方法，据之可得到方程$x^2-ay^2=b$的所有整数解。这项工作标志着数论研究方法上的一个飞跃，体现了一种新的时代精神，改变了过去(包括费尔马、欧拉)那种认为给出特殊解与证明存在性是一回事、以及把提出问题和解决问题分割开来等旧观念。拉格朗日第一个赋予丢番图分析以某种统一的规范，开始引导丢番图分析从一大堆互不关联的结果的零碎混乱从中走上统一理论的道路。1766年，他把欧拉得出的二次不定方程 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$(其中各项系数为整数)的不完备解，推广为完备解，他是通过建立一个二元二次型的一般理论获得这个结果的。该理论的基本概念是型的“等价”、“约化”和“表示”，这是很关键的发现。拉格朗日解决了二元二次型的约化问题，并发现如果一个数能被一个型所表示，那它就能被许多其它的相互等价的型所表示，而这些互相等价的型可从原始型经变换得出。拉格朗日型理论显示了数学思想的新精神，为19世纪高斯建立型的理论做了扎实的奠基。1770年，拉格朗日发表《一个算术定理的证明》，基于欧拉花了四年时间尚未完成的但却富有启发性的思想，第一个成功地以最简单的证明核实了古希腊数学家丢番图公元250年在《算术》中提出的、后经费尔马发展了的“四平方定理”：每个自然数都能表示成不多于4个完全平方数之和。1771年又证明了著名的威尔逊(Wilson，1741—

1793)定理：对每个素数p，$(p-1)!+1$能被p整除；反之，如果$(p-1)!+1$能被q整除，则q必为素数。与此同时，他又得出n为素数的充要条件是$(n-1)!+1$能被n整除。

从1772到1797年，拉格朗日在微积分方面除了得到现在微积分学中著名的拉格朗日中值定理、无穷级数的拉格朗日余项、拉格朗日方程之外，更重要的是他把微积分代数化以企图重建微积分基础的尝试。关于这项工作，我们将在后面专门介绍。

总之，拉格朗日与欧拉、拉普拉斯等数学大师一起，不仅支配了18世纪的数学，而且为19世纪的数学指明了方向。

拉普拉斯是法国数学家、天文学家，他的业绩使得17世纪开始出现，经过18世纪贝努里家族及欧拉等人发展起来的分析学形成一个高峰。他将分析学方法应用于天体力学、位势论和概率论，取得了辉煌成果，他的两部巨著《概率论的解析理论》(出版于1812年，行文于1774年)和《天体力学》(5卷，1799—1825)以及《概率的哲学论文》(1814)、《世界体系的说明》(1796)、《拉普拉斯方程》等，充分显示了分析学的重要作用。不同于康德从哲学的角度来研究星云假说，拉普拉斯是从数学和力学的角度出发，不但充实了星云说的内容，而且作出了详细的科学论证，成为宇宙进化论的先驱。拉普拉斯是18世纪概率论发展的集大成者，他把无穷小分析方法系统而协调地运用于概率论，首开现代概率论之先河。

1774年，拉普拉斯发表两篇论文讨论了古典的分配赌注问题和由同一现象的大量观察值定义“平均值”问题。他还基于哲学的立场考虑了如何为取决于大量原因的事件构造出一个近似的概率概念。在《概率论的解析理论》这部继往开来的不朽著作中，他总结了前辈、特别是自己40年间对概率和统计问题丰富的研究成果，明确表述了概率论的基本定义和定理，建立了观察误差理论和最小二乘法，证明了英瓦尔夫——拉普拉斯定理等等。这部

著作标志着概率论由“组合”数学的一部分转变为分析数学的一部分，给概率论带来了实质性进展。

拉普拉斯在微分方程、测地学、势函数理论等领域都有杰出贡献，拉普拉斯方程、拉普拉斯变换和行列式的拉普拉斯展开式，在数学和科学技术中有着广泛应用。

另外，18世纪的数学成就还应包括：英国数学家泰勒和马克劳林在研究弦振动和天文学中建立了级数展开理论。前者引入了有限差分法，研究了插值法的某些原理，他得到的“泰勒级数”在欧拉和拉格朗日的工作中显示了重要意义。后者还在几何学高次曲线和射影几何学的现代理论方面，提出了某些重要定理；确立了数列收敛的积分特征，并得出了级数求和公式，被称为数学上的奇才。法国数学家克莱洛建立了某些变数函数全微分的概念，引入了一阶微分方程通解、特解和奇解的概念。首次提出三角内插法公式，引入了曲线积分，研究了双曲率曲线，这是研究空间曲线解析几何与微分几何的先声。瑞士数学家兰伯特根据欧拉所发现的指数函数与三角函数之间的关系，首次严格证明了π是无理数；最先系统地发展双曲函数；他对欧几里得平行公设作出了有启发性价值的研究，提出了建立非欧几何的思想，从而成为非欧几何的先驱者之一。法国数学家勒让德创立并发展了大地测量理论；提出了球面三角形定理；发现了勒让德多项式并讨论了它们的性质；确定了变分法极值存在的标志；在数论方面，对连分数理论，数的一般性质和二次剩余互换律的证明，素数的数量等问题进行了当时最全面的讨论。他在椭圆积分方面的工作，为19世纪高斯的研究开辟了道路。法国数学家蒙日创立了画法几何学和射影几何学，对微分几何学和解析几何学都有宝贵贡献。《分析在几何学上的应用》是曲面微分几何最重要的早期论著之一，在这里引入了三维空间的曲面曲率线概念。蒙日发展了偏微分方程中特殊曲面的理论，提出了一阶微分方程积分法的理论和

关于弦振动问题的解法。他对每一种曲面都作出了微分方程和有限方程。法国数学家卡诺在数学分析方面的成就主要表现在发表《论无穷小计算的亚物理学》这样一部论述微积分的半哲学著作，他在书中对论证无穷小计算结果的正确性进行了尝试。他对微积分中的各种方法(穷举法、极限法、拉格朗日解析函数论等)所作的评论，在某种程度上为19世纪初数学分析的批判改革运动提供了哲学启示。在射影几何学方面，他在《位置几何学》中第一次将有指向的量系统地应用于综合几何中。有指向的量后来被海比乌斯进一步作了发挥(1827)。他在《横截线理论的研究》中，把古希腊数学家梅内劳斯(Menclaus，约公元98年)定理推广到：以任意的几次代数曲线代替定理中的横截线时结论不变。

总之，18世纪的数学家开始建立数学分析的各个分支，揭示了很多新而又新的问题，发展了微积分在力学、天文学和科学技术方面的应用，预示代数学和几何学进入了革命的前夜。同时，由于微积分基础的内在矛盾，使它获得普遍而丰富成果的数学方法中也包含了一些在逻辑上无法作出一致性解释的概念，因而又阻碍了数学分析的发展，使数学家不得不考虑进行重建微积分基础的种种尝试。

Ⅱ．微积分基础的内在矛盾导致“第二次数学危机”

牛顿的流数术微积分对无穷小量“o”作过三种不同的解释(固定的量，动态的趋于零的量，最初比和最终比来代替无穷小量)，有时提到无穷小，有时又提到极限，对无穷小量“o”时而引入，时而又忽略不计，游移不定，随心所欲。但他始终无法摆脱一个逻辑上的困境：符号“o”究竟是不是零？他的极限概念也是不严

格的，不能为人们普遍接受。

莱布尼兹的无穷小微积分在“可以允许的假设”中，明显地、直接地包含着一个刺眼的矛盾：两个量间的(无限小)差异，同时等于零又不等于零。他亦始终无法找到从有限量过渡到无穷小量之间的桥梁。莱布尼兹理论还有另一个弱点，就是不能充分准确地说明到底用什么法则去规范扩大了的实数系。所以，由于没有严格的逻辑奠基，微积分理论的一些最基本的概念是含糊不清的。一方面人们因为它的结论经得起实践的检验而不得不接受它，另一方面又对它缺乏必要的逻辑分析进行批判。法国数学家洛尔说“微积分是巧妙的谬论的汇集”。英国大主教贝克莱出自对科学的厌恶和对宗教的维护，抓住微积分不合逻辑的问题借机攻击无穷小量是“消逝量的鬼魂”。尽管1700年法国科学院曾组织过关于微积分的辩论，但在当时是必然的说不清楚。17、18世纪的数学家，对无穷小和函数的概念无一致见解，从而导数、微分、积分等概念含混不清；符号使用不严格，不考虑导数及积分的存在性；往往不顾无穷级数是收敛还是发散，就任意进行形式上的计算，等等，因而为问题的具体数学结果长期争执不休。马克思后来批评略去高阶无穷小是“暴力镇压”，“肯定是通过不正确的数学途径得出了正确的结果”。19世纪的天才数学家阿贝尔指出，18世纪“在数学中几乎没有一个无穷级数的和是以严格的方式确定出来的”。莱布尼兹在研究级数时也认为

$$1-1+1-1+1-\cdots=\frac{1}{2}$$

的结论是正确的。甚至18世纪最伟大的数学家欧拉也写出

$$0=1^n-2^n+3^n-4^n+\cdots \qquad (n\in N)$$

这种荒谬的公式。而另一位大数学家拉格朗日在1797年出版的《解析函数》中确认连续函数一定可微，并一定可展成幂级数。总之，18世纪所形成的微分方程、解析力学、变分法、微分几何

等新分支，都是建立在不严格的基础上的。它妨碍了数学分析的进一步发展。到18世纪后半叶，即莱布尼兹方法统治欧洲大陆50余年之后，微积分在逻辑上和哲学上的弱点，使人们对它的理论的可靠性产生了怀疑，那种认为微积分“一劳永逸地解决了测量和运动的一切问题”，“是天衣无缝的教义”的观念发生了动摇。史称“第二次数学危机”（第一次数学危机是公元前5世纪希腊毕达哥拉斯学派发现不可通约量即现在的无理数所引起的，危机的解决促使古典逻辑发展和欧几里得几何产生）。为了建立微积分可靠的理论基础，摆脱第二次数学危机，数学家们作出了长期不懈的努力。

Ⅲ．微积分基础概念的演化
——先驱者的探索

（1）洛必塔的无穷小量分析

瑞士数学家洛必塔是约翰·贝努里的学生，1696年他出版第一部有影响的微积分教程《曲线的无穷小分析》，以定义和公理作为理论的出发点，第一次系统地叙述了微积分，但却没有解决完善微积分基本概念的问题。他所建立的第一个公理“我们要求把仅仅相差一个无穷小量的两个量看作毫无差别；或换句话说，一个量仅仅增加或减少与之相比是无穷小的另一个量，则可认为它保持不变”，是企图为微积分提供一个理论基础，但它本身就是一个明显的矛盾，即承认了一个是零而又非零的量的存在。这种量的存在，是不能作出明确的逻辑说明的。

（2）达朗贝尔“理性的”极限观念

达朗贝尔的介入是重要的，他“脱下了微分学神秘的外衣”

(马克思语)，把欧洲大陆的数学家引导到把极限概念作为分析学中心概念的轨道上来。他是历史上第一个看出牛顿方法中导数概念实质的人，把最初比与最后比理解为一种极限，认为极限和极限理论是微积分的真正抽象。达朗贝尔在《方法百科全书（数学篇)》(1744)的若干文章中，首次将微积分建立在"理性的"极限观念上。他认为"极限理论是微分学的真正形而上学的基础"，"一个量永远不会重合或变得等于它的极限；但它总是逐渐接近于它的极限，并与极限的差要多小就多小"。达朗贝尔明确提出极限概念，为解决微积分理论基础问题取得了很大的进步，但对微积分的方法并未作充分的证明。

(3) 欧拉形式化代数方法的微积分

被称为"分析的化身"的欧拉1748年在《无穷小分析引论》中，对函数概念进行了深入讨论，并将它作为分析学的基础。他确认导数中并没有隐藏那么大的神秘性，不必怀疑微积分。他排除无穷小和微分的概念，认为导数才是确定"$\frac{0}{0}$"之值的一个方便途径。他对微积分采用形式化的代数方法：

$$\because\quad a\cdot 0=0,\qquad \therefore\quad \frac{0}{0}=a,$$

即$\frac{0}{0}$可以是任何数；

$\because\quad (dx)^2$消失在dx之前，

$$\therefore\quad \frac{(dx)^2+dx}{dx}=1$$

欧拉的《无穷小分析引论》和《微分学原理》(1755)是当时的标准教程。他那建立在无穷阶零之上的纯代数的微分学，当然有严重缺陷。但其进步意义在于把微积分从几何中解脱出来，使

之建立在代数基础上，为19世纪末把微积分理论建立在实数系基础上开辟了道路。

（4）拉格朗日的代数化微积分

拉格朗日从1772年就开始了他那重建微积分基础的雄心勃勃的尝试。这年，他发表《从相对计算到差分的种类》，根据微分运算和二项式展开式之间存在着某种相似之处，构思了把微积分归结为代数的设想。在1797年出版的《解析函数论》中，拉格朗日这种思想得到更明确更具体的体现。同年，他又发表了《包含着微分学的主要原理，不用无穷小或正在消失的量或极限或流数等概念，而归结为有限量的代数分析艺术》，明显地表达了他否定牛顿方法，力图使微积分摆脱由于使用无穷小、或正在消失的量、流数、极限等概念而面临的困境，从而独自地发展微积分的意向。

拉格朗日认为，微积分实际上是一种以无穷项多项式（无穷级数）为对象的代数，因此微积分概念的基础应当建立在代数学之上，而代数学的严密性已是毋庸置疑的了，这就使微积分基础得到了保障，同时还可避免由于引入极限而带来的抽象思维和分析思维。然而，他却未曾料到在关键上发生了失误。

拉格朗日的代数化微积分，是把整个理论基础建立在任一连续函数都存在一泰勒展式这一假设之上的。这样，函数就转化为无穷多项式，无穷多项式中的各项系数就是函数的各阶导数。但他关于函数可展为幂级数的假设有一个不可克服的根本弊病，他没有考虑到各阶导数必须存在这个问题，而仅仅考虑了函数的值和它展式的值。这就使得他的设想失去了可靠性，而且颠倒了函数可展性与可导性的关系。拉格朗日根据有限量代数的概念奠基数学分析的方法，限制了函数的一般概念，建立的算法也更复杂而不便应用于实际。

尽管拉格朗日奠基微积分的尝试因方法上的缺陷而失败，但产生了决定性影响。他“事实上摆脱了牛顿的流数，莱布尼兹的各阶无穷小量、消失量的极限值理论以及作为微分系数的符号$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$等所有那些在他看来是形而上学的先验的东西”，“拉格朗日的巨大功绩不仅在于用纯代数的分析方法给泰勒定理以及一般的微分学奠定了基础，而且尤其在于引进了导函数的概念”(马克思语)。象欧拉一样，他也使微积分脱离了几何和力学方法，对后来数学分析基础理性的逻辑发展有重要作用。拉格朗日方法在一段时间里曾被广泛接受，他被当作“形式幂级数方法的先驱”而受到推崇。这说明那个时代的数学家所着眼的是微积分概念的本质，而不是其方法在演绎程序上是否恰当。

（5）罗伊里埃、拉克鲁阿用极限理论奠基微积分的思想

1784年，拉格朗日主持的柏林科学院作出特别悬赏，奖励对微积分中无穷的概念建立严格和明确的理论有重大贡献的数学家，西蒙·罗伊里埃的论文《高等微积分原理初探》(1787)获奖。罗伊里埃用极限思想对古希腊的“穷竭法”作了修改，并用极限定义导数，进而由导数来定义微分。他把导数定义为$\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，并强调这个极限是一个不能拆开的单一变量的极限，它不是只要有同一比值的任何两个量之比或牛顿的消逝量的最终比。他又以同样的思想定义了高阶导数。罗伊里埃的缺点在于只有单调变量概念，因而只有单侧极限概念，他关于变量特征与其极限特征有一致性的解释无法说明有理数列的极限是无理数。罗伊里埃排除了无穷小量和$\frac{0}{0}$等有神秘色彩的概念和符号，表明了以极限概念作为微积分基础的正确思想。

拉克鲁阿1797年出版了有很大影响的著作《微积分学教程》，企图用极限理论统一牛顿、莱布尼兹和拉格朗日的微分法。他提出了两个量的比，当其中每一个都趋近于零时能够趋近于一个作为极限的确定值这一明确的思想。他指出，比值$\frac{ax}{ax+x^2}=\frac{a}{a+x}$，而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{a+x}=1$，进一步，他认为1是当$x$可以通过负值趋于零的极限。他也引进用导数表示的函数的微分$dy=f'(x)dx$，并首次使用微分系数这个名称表示导数。但是，拉克鲁阿仍采用有争议的符号$\frac{0}{0}$；对级数的说明也有许多谬误，在对级数求和时没有考虑到它是否收敛。不过，在《微积分学教程》第二版中，情况有了好转，他给出的许多例子仍然保留在今天的微积分课本中。此外，拉克鲁阿还于1797年引入了比拉格朗日所定义的函数概念更广的概念："每一个量，若其值依赖于一个或几个别的量，就称它为后者（这个量或这些量）的函数，不管人们知不知道用何种必要的运算可以从后者得到前者。"

拉克鲁阿的著作被翻译成多种文字广泛流传，从而他的极限思想也产生了较大影响，为把极限概念作为微积分的基础做出了先驱性贡献。

直到18世纪结束，微积分即数学分析基础仍旧是一个争论中的问题。许多数学家的努力探索，虽然使微积分理论有相当进展，但并未获得突破性进展。尽管有些数学家因感到毫无希望而放弃了努力，但对这项燃眉之急的工作却从未中止过。关于数学分析基础问题相当广泛而又激烈的争论，为19世纪以法国大数学家柯西为代表的分析批判运动积累了丰富的材料和经验。柯西和德国的维尔斯特拉斯等杰出数学家卓有成效的工作，使以极限理论为基础的数学分析体系得以确立，这是19世纪数学取得重大成

就的标志之一。为此，柯西荣获“现代分析奠基人”的桂冠，维尔斯特拉斯则被誉为“数学分析之父”——这应当是19世纪的话题了。

第三章

19世纪：近代数学的成熟期——数学的飞跃发展

在数学史上，19世纪是一个具有特色的时代，它是近代数学成熟的阶段，也是现代数学的孕育期。

由于18世纪末开始的工业革命有力地推动了科学技术的发展，大学教育也蓬勃地发展起来，出现了学术民主化和数学学派林立的盛世之景：以来自巴黎多科工艺学校（或与它有关）的数学家为主的法国学派矗立于世纪之交；接着，英国"新一代"数学家创建的剑桥学派和德国的柏林学派、哥廷根学派相继登上了世界数学宫殿的宝座；最后三十年，又出现了意大利学派和俄国的彼得堡学派。特别是哥廷根学派的历史贯穿德国的整个科学兴盛时期，并在世界数学科学的历史中长期占主导地位。在数学哲学的争论中，也形成了三大学派：直觉主义学派、逻辑主义学派和形式主义学派，他们把数学基础的研究推向了空前热烈的高潮。在这个世纪里，数学思想发生了急骤的变化，各种数学思潮、数学学派、数学家之间的思想斗争极大地推动了数学的发展。新数学思想的洪流扫荡了18世纪末笼罩在数学界的认为数学的资源已经枯竭了的悲观气氛。数学以其题材的巨大膨胀、旧领域的扩展和新领域的开辟、传统观念的突破、数学基础严密性的建立、数学成果的全面丰收，使人有筚路蓝缕而耳目一新的感奋。

在19世纪，分析、几何、代数几个主要领域的大多数分支，如微分方程论、变分法、函数论、级数理论、非欧几何、射影几何、微分几何、几何学基础、近世代数等都得以迅速发展和成熟起来，它们随着数学基础严密性的建立而有了可靠的逻辑保障。而且，各个分支相互渗透，出现了综合和统一的趋势。数学发展的相对独立性日益增长，数学本身内在矛盾推动纯粹数学出现许多重大突破（如非欧几何、集合论等等），理论的、抽象的、内省的纯粹数学与应用的、具体的、对外有影响的应用数学这两个方向相反的主题，随着数学的专门化而巧妙共生、迅速成长。数学研究对象的一般化和抽象化是19世纪数学发展的一大特点，它的对象不仅是现实已经给出的，而且也是可能的量的关系和形式。这种抽象化特点在代数学中尤其显著。微积分这个工具被改进成严格的分析体系，分析学依然是数学发展的中心和主流，它得益于物理学问题的研究，又促进了数学物理理论的有力发展；这些理论最终导致了20世纪量子力学和相对论的诞生，结果使人类对物质和空间的基本性质有了更深入的理解。另一方面，由于严格审查微积分和几何的逻辑基础，在无穷集合与非欧几何中发现了数学的新天地。集合论思想不但促进了数学的进一步发展，而且导致了20世纪的数学家对数学基础更深刻的理解，对数学概念之间的相互关系和数学理论内部逻辑结构的探讨，对数学证明和数学理论的构成方式本身的审查。而非欧几何深刻地改变了传统的几何学观念，表明数学已经着眼于对各种可能的空间和结构的研究了。

19世纪的数学发展大体可分为三个时期：头三十年为新数学的兴旺期，次二十年为中继期，后五十年为成熟昌盛期。兴旺期所获得的划时代成就，都是由二十多岁的青年数学家完成的。

Ⅰ. 微积分基础概念的进一步演化
——数学分析严密化体系确立

为了摆脱"第二次数学危机"，对微积分基础问题经历了一百多年的激烈争论之后，终于在19世纪初形成了一个对数学分析理论进行系统化和严格论证的批判性检查运动，并取得了卓越成效。它包括极限理论的建立、数学分析的算术化、实数理论和集合论的建立等重大成就。

（1）极限与无穷小的综合——柯西奠基现代分析体系

恰好生于对微积分基础理论怀疑的时代的柯西——这位毕业于法国多科工艺学校的杰出数学家，在1821年《分析教程》中首次提出微积分新的理论基础。接着，又发表与微积分基础概念严格化密切相关的著作《无穷小分析原理概要》(1823)、《分析的几何应用原理》(1826～1828)。这三部著作集数学分析之大成，奠定了以极限理论为基础的现代数学分析体系，在数学分析的发展史上建树了一座有划时代意义的里程碑。

柯西抛弃了物理和几何直观，通过变量来定义极限的概念："如果代表某变量的一串数值无限地趋向某一固定值时，其差可以任意小，那么这个固定值就叫做这一串数值的极限。"这个当时最清晰的定义，是数学分析算术化伊始的信号。接着，他又定义了无穷小："一变量的值无限地减小，以至收敛于零，则称此变量为无穷小。"对无穷大，柯西认为是它的值可以无限地变大，以至能够超过任何给定的常量的变量。在这里，柯西让趋于极限的、特别是趋于极限零的变量概念扮演着中心角色，从而把极限原理和无穷小量原理综合起来，并以此为基础定义了函数的连续

性、导数和微分、积分。

柯西是这样来定义函数的连续性的：如果在两个界限之间（即某一区间内）变量x的无穷小增量α，总使函数$f(x)$产生一个无穷小增量$f(x+\alpha)-f(x)$，则称函数$f(x)$在这两个界限之间连续。柯西关于一区间上连续函数的定义，使用了定义于极限概念基础上的无穷小，因而较之旧的定义既有更严格的逻辑依据又有精确的数学形式。令人不解的是，柯西只定义了变量的极限，而没有定义函数的极限。联系他把具有性质$\lim\limits_{\alpha\to 0}f(\alpha)=0$的函数$f(\alpha)$当作无穷小量来处理，意味着函数也被认为是变量。

柯西在《无穷小分析原理概要》（以下简称《概要》）和《分析的几何应用原理》中，给出了字句完全相同的导数定义，定义中$\Delta y/\Delta x$的分子和分母都作为无穷小量，并且Δy和Δx“同时无限地趋于零极限”，而Δx可能是正或负地趋于零。这与1799年捷克籍的意大利数学家波尔察诺所给出的导数定义完全一致。在导数基础上，他又定义了微分：设独立变量x的微分dx为一有限常数，则函数$y=f(x)$的微分$dy=f'(x)dx$或$dy=y'dx$。导数$y'=f'(x)$可称为微分系数。他把$y=f(x)$的n阶微分定义为$d^n y=f^{(n)}dx^n$。他还把一个变量的函数的微分定义推广到任何有限个变量的情形，即得出了通过偏导数来定义多元函数的微分（全微分）。柯西关于微分的定义确实具有独创精神，它彻底颠倒了以往把微分作为第一性概念，通过微分定义导数的传统方法。

柯西（还有拉克鲁阿）的工作把导数和莱布尼兹的微分统一起来，把求微分的问题归结为求导数的问题。虽然柯西已经把连续性和导数的概念严密化提高到了相当的程度，但是他和同时代的几乎所有数学家都确信连续函数一定是可微的。波尔察诺1834年觉察到了连续性和可微性的区别，最早明确地给出区别连续性与可微性的例子，出现在德国大数学家黎曼1854年的论文《用三

角级数来表示函数的可表示性》之中。

通过求微元之和来求积的（自古希腊以来就萌芽的）传统思想，虽为莱布尼兹所强调，但从牛顿开始的视求积问题为求切线的逆问题的思想占了主导地位（当然，这也是本质的方法）。柯西又使这种情况发生了逆转，他强调把积分定义为和的极限来取代把积分看作是微分的逆运算，从而使积分作为微元和的思想得到继承和发展。在《概要》中，柯西对定积分作了系统的描述。他首先从极限概念出发定义了连续函数的定积分：设$f(x)$在区间$[x_0, x]$上连续，且用分点x_1，x_2，…，x_{n-1}，$x_n=x$将区间分割，则当最大子区间的长度趋于零时，积分为$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$。接着柯西定义了$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$，且证明了$F(x)$在区间$[x_0, x]$上连续。他还用积分中值定理第一个证明了微积分学基本定理：$F'(x)=f(x)$。柯西强调指出，在使用定积分和原函数之前，注意确定定积分以及间接地确定反导数或原函数的存在性是首要的问题。他证明了$f(x)$的全体原函数彼此相差一个常数，进而给出了不定积分的定义：$\int f(x)dx=\int_{a}^{x}f(x)dx+C$。他还定义了具有跳跃间断或为无穷时的被积函数的积分。

柯西在《分析教程》中对级数收敛性第一个作了广泛的论述："令$S_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}u_i$是所研究的无穷级数前$n$项的和，$n$表示自然数。如果对于不断增加的$n$的值，和$S_n$无限趋近某一极限$S$，则级数叫做收敛的，而这个极限值叫做该级数的和。反之，如果当n无限增加时，S_n不趋于一个固定的极限，该级数就叫发散的，

而且级数没有和。”在此基础上，柯西给出了著名的关于无穷级数的“柯西收敛判别准则”和比值判别法、根式判别法、比较判别法和对数判别法；证明了两个收敛级数之和u_n+v_n收敛到各自极限的和，对于乘积也有类似结果；对于带有负项的级数，证明了由项的绝对值构成的级数收敛时原级数收敛，并推导了交错级数的莱布尼兹判别法；研究了项是复变函数的级数。这样，柯西首次建立了泰勒级数收敛的精确条件，引进了收敛半径概念，从而给出了收敛级数理论的明确构造，发展了无穷级数收敛学说。它将18世纪混淆在一起的连续性、可微性、泰勒级数展式等从函数的一般概念中分离出来。

不足的是，在对数学分析的探讨中，柯西不愿把函数概念作为变量概念的基础，而用含有变量概念的语言来定义函数。因而他仍未得到函数概念的现代定义。一般的函数定义，首先由德国数学家狄里克雷在1829年提出；现代数学分析的函数定义是由黎曼给出的。柯西极限概念的严密化还是不够的，还常用“想要多么小就多么小”、“无限趋近”、“无穷小增量的最终比”等含义不甚明确的语言。他一方面排除了无穷小的形而上学的绝对存在，而在某些情况下又把无穷小量当作某种独立的量使用而参加运算，因而并未完全用极限代替无穷小，他认为他的“宗旨是要使在《分析教程》中建立的定理的严格性与直接考虑无穷小而导致的简明性二者协调起来”。他虽然偶尔也用$\varepsilon—\delta$方法来作证明，但他并没有将它作为一种根本的方法来定义数学分析中一系列重要概念（如极限、连续、导数、积分等），$\varepsilon—\delta$方法真正的明确和完成属于后来的德国数学家维尔斯特拉斯。柯西虽然对定积分作了系统的开创性工作，指出了可积性问题，把连续函数的和式极限作为定积分定义，但由于未定义一致连续性，其证明是不严密的。他曾断言：如果$u_n(x)$连续，且$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=F(x)$收敛，则

$F(x)$也连续且可逐项积分：$\int_a^b F(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$。他甚至断言，对于连续函数有$\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}dx$。他还确认多元函数若对每个变量连续则它必是连续的，等等。挪威青年数学家阿贝尔1826年的工作修正了柯西关于连续函数的一个收敛级数的和一定连续的错误结论。阿贝尔对连续函数进行了研究，发现连续函数级数之和并不一定连续（例如$\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots$，每一项均连续，但当$x=(2n+1)\pi$而$n$为整数时上式并不连续），他用一致收敛思想证明连续函数的一致收敛的级数之和才在收敛区间内部连续。但阿贝尔并未单独提出一致收敛概念。直到二十年之后，才由英国数学家斯托克斯和德国数学家塞德尔提出。因此，在柯西时代，对一致收敛性、连续性、一致连续性、可微性、可积性以及它们的关系，都还不甚明确。用现代标准衡量，柯西的严密化程度还不够。

由上可知，柯西在数学分析的历史上，不是一个和传统决裂、根除旧基础而建立新基础的彻底革新者，而是一个承先启后、继往开来的大师。但他在分析严格化中占有十分重要的地位，他的理论一直保持到19世纪末。直到半个世纪以后，当集合论和实数理论发展起来时，才有必要重新修订这些原理而建立更严密的定义。

（2）波尔察诺的ε—δ思想

与柯西同时代的捷克籍意大利数学家、哲学家波尔察诺，就本质而论，已经考虑到了极限理论中的ε—δ法则。他为了用纯代数和分析的方法来证明代数学基本定理，以取代德国数学家高斯

1799年关于此定理的纯几何方法的证明，于1817年发表了他的代表性著作《关于方程在每两个给出相反结果的值之间至少有一个实根的定理的纯粹分析的证明》。由于需要一个精确的函数连续的定义，于是波尔察诺第一个开始了对函数性质的仔细研究，第一个用极限概念给出了函数在某一区间内连续的恰当定义：如果在区间内任一x处，只要$|\omega|$充分小，就能使$|f(x+\omega)-f(x)|$任意小，则称$f(x)$在该区间上连续。这与定义函数连续性的现代方法——$\varepsilon-\delta$方法是非常类似的。

波尔察诺在建立数学分析严密性基础的过程中，除实数理论之外，都采用了正确的概念。他否认无穷小和无穷大，1831年写成的，在他死后3年才发表的《无穷悖论》以哲学意义多于数学意义的思想方法，维护了实无穷集合，强调了两个集合等价的概念（即两个集合的元素之间的一一对应关系）。他坚持无穷集合的子集可以与整体等价。虽然他在超限数、集合的基数等概念上还存在着缺陷，但他是在历史上第一个朝着建立集合的明确理论的方向迈出积极步骤的人，他关于无穷的探讨，成为康托尔无限集合的先声。

波尔察诺1817年在证明连续函数“根的存在定理”中，证明了有界实数集的最小上界的存在性。他的方法被维尔斯特拉斯1860年用来证明了波尔察诺—维尔斯特拉斯定理（聚点原理），即对于任意有界无穷点集，都存在一个点，使得该点的任一邻域内都包含有这无穷点集的点。

波尔察诺1817年第一个把函数$f(x)$的导数定义为当Δx经正值和负值趋于零时，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\longrightarrow f'(x)$。他强调指出$f'(x)$不是两个零的商，也不是两个消失量的比。柯西后来定义导数采用了与波尔察诺同样的方式。

波尔察诺还在1810年前后就开始和高斯、傅里叶等对无穷级

数进行确切的研究，他强调对无穷级数必须考虑收敛性，并且特别批评二项式定理的证明是不严密的。在1817年他得到了序列收敛条件和级数收敛的清晰而正确的概念。

但是由于波尔察诺在数学界的地位不高，他的工作没有引起人们的注意，他的思想未得到及时传播。历史上，把关于序列收敛条件的正确概念归功于柯西；而把用$\varepsilon-\delta$方法定义极限、函数连续性、导数及其它有关概念的功绩，归于维尔斯特拉斯。

（3）维尔斯特拉斯——“数学分析之父”

德国数学家维尔斯特拉斯是继柯西之后，对数学分析的发展做出最重要贡献的数学家。他早年在波恩大学攻读法律，23岁时改学数学，但未取得学位，他大器晚成，主要靠自学，将近40岁才成名。1841至1854年还在乡村中学当教师时，利用业余时间刻苦钻研而发表了一些数学分析研究成果。这位被后人称誉为“数学分析之父”的一代大师，完全不承认数学分析的几何直观方法，他的目的是要把分析算术化。数学中许多基本而又模糊的概念，都由他加以澄清。1856年，维尔斯特拉斯就任柏林大学讲师，1864年升任教授。他在柏林大学一系列的讲课、讲演中，给数学分析奠定了严格的基础。为此，他一反已有的变量和极限的动态观点，而提出了完全不同的静态观点。他批评“一个变量趋于一个极限”的说法，而以静态的观点把一个变量x简单地解释为一个字母，这个字母表示数集中的一个数。连续变量x的定义则是：如果对某数集中的任一值x_0和任意小的正数δ，在区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中，总存在有该数集中的其它值，就称x为连续变量。维尔斯特拉斯还给出了函数连续性的现代定义：如果对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立，则称$f(x)$在$x=x_0$处连续。如果用$L$替代$f(x_0)$，则称$L$是$f(x)$在$x=x_0$处的极限。如果$f(x)$在区间内每一点都连续，则称

$f(x)$在这个区间上连续。这样，维尔斯特拉斯就用ε和δ这种静态的有限量刻划了动态的无限量，既排除了无穷小这个有争议的概念，又消除了波尔察诺和柯西在定义函数的连续性和极限中用到的“变为而且保持小于任意给定的量”这种说法的含糊性。它标志着数学分析又从动态化过渡到静态化，是对常量的否定之否定。对无穷级数的一致收敛概念，维尔斯特拉斯在1842年就已得到。他曾断言级数一致收敛，因而构成复变量解析函数；他利用一致收敛概念，给出了级数逐项积分和在积分号下求微分的条件；他发现了在闭区间连续的单变量和多变量函数可表示为此区间上绝对收敛的多项式级数。1860年，维尔斯特拉斯利用波尔察诺证明“有界实数集必存在上确界”时采用的区间套方法证明了聚点原理“有界无限点集必有聚点”。之后，又于1861年确认了连续性不依赖于可微性。1872年，他在柏林科学院的一次讲演中，通过一致收敛级数，用分析式给出了历史上第一个处处连续而处处不可微函数的经典例子：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(a^n\pi x)$$

其中a为奇整数，x为实数，$0<b<1$，$ab>1+\frac{3}{2}\pi$。

在维尔斯特拉斯的推动下，人们发现了许多连续但处处不可微（或在一个稠密点集上不可微）的所谓“病态函数”。连续性与可微性差异的重大发现，标志着人类对函数认识的进一步深化，使人们不再轻信几何直观的不完全可靠的思维方法，导致了20世纪初一场积分学革命——实变函数论的诞生，从而促进了数学分析的发展。

（4） 黎曼积分建立

在柯西对定积分系统的开创性工作的基础上，德国大数学家黎曼研究了更不规则的函数的积分，考虑了在减弱条件的情形下傅里叶系数的积分公式仍然成立的可积性问题。在1854年的就职论文《借助三角级数表示函数的可能性》中，黎曼引入用三角级数表示函数的理论，为积分论指示了方向（对群论、实变函数论的发展都有十分重要的意义）。他严格地定义了黎曼积分，并证明其存在。黎曼考察了在区间$[a, b]$上有定义的有界函数$f(x)$的积分，他用分割T将$[a, b]$分成n个小区间，分点为$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，$\lambda(T)$表示小区间长度$\Delta x_i$中的最大数。他证明了当$\lambda(T)\to 0$时，极限$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_n=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$是唯一的充要条件是：当各小区间长度趋于零时区间$\Delta x_i$的总长度趋于零。他定义了当$\lambda(T)\to 0$，积分和$S_n$极限存在时，函数$f(x)$在$[a, b]$上的定积分为$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$。这个定积分历史上称为黎曼积分，和数$S_n$称黎曼和，函数可积指的是黎曼意义下可积。黎曼还给出了每个任意小区间上有无穷多个间断点的可积函数的例子：$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{4}+\frac{(3x)}{9}+\cdots$，其中$(x)$表示$x$和最靠近$x$的整数之差。这样，黎曼意义下的积分就排除了连续和分段连续的要求。同时，黎曼还给出闭区间上有界函数可积的另一个充要条件，实际上是建立了相当于现在的上和与下和。

法国数学家达布1875年引入了所谓达布小和数$\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$和达布大和数$\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$（$m_i$和$M_i$分别为$f(x)$在子区间$\Delta x_i$上的最大

下界与最小上界)，它们与黎曼定义中所考虑的和数$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$不同之处在于：大和数与小和数都是被分划唯一确定；而$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$在分划取定之后，由于$\xi_i$有多种选法，其和数可能有许多不同的值。达布证明了，一个有界函数$f(x)$在$[a, b]$上可积的充要条件是，$f(x)$的间断点集合的测度为零。他还证明了在推广意义下可积函数（达布可积意义下）的微积分基本定理成立。达布利用邦内（O. Bonnet）不用$f'(x)$的连续性就对微分学中值定理加以证明的方法证明了：当$f'(x)$只在黎曼—达布意义可积情况下

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

根据伏尔泰拉（Volterra）对上和的下确界引入上积分$\overline{\int_a^b} f(x)dx$和对下和的上确界引入下积分$\underline{\int_a^b} f(x)dx$这两个术语，达布证明了所谓“达布定理”：下积分等于达布小和数当$\lambda(T)\to 0$时的极限，上积分等于达布大和数当$\lambda(T)\to 0$时的极限，而且证明了有界函数可积的充要条件是它的上、下积分相等。

在19世纪80年代，二重积分理论的研究也取得了进展，累次积分与二重积分的关系搞清楚了。1876，托默（Karl J. Thomae，1840～1921）将黎曼的积分理论推广到二元函数情形。

至此，黎曼积分已建立了比较严格的基础。

（5） 实数理论和集合论最终完善经典分析

随着数学分析的严密化，数学家们愈加感到由于对数系的结构缺乏明晰的理解，造成在研究连续函数性质时不断失误。例如

波尔察诺证明连续函数根的存在性定理时，把一个关键的地方搞错了；柯西无法证明他提出的序列收敛准则的充分性；戴德金无法证明自己1853年发现的单调有界变量的极限存在定理和介值定理；……等等。这些都是由于对实数系的结构没有深刻认识的结果。

同时，自19世纪二十年代非欧几何发展起来之后，数学家们认为数学的真实性只有建立在算术基础上才能得到保证，单靠逻辑则会误入歧途。而代数学也迫切需要完善数的理论，以便建立代数的逻辑结构。这种思潮的代表人物是维尔斯特拉斯，他首先提出应当建立算术连续统理论，把数系作为分析学的牢固基础。

无理数理论是实数系逻辑结构的一个难点。二千多年前毕达哥拉斯学派时代（前572—497）就发现了不可通约量的存在，后来欧多克斯（约前408—355）的“比例论”和“穷竭法”在发现无理数的道路上又前进了一步。但是使人惊奇的是直到19世纪末，人类对无理数本质的认识却未取得突破，无理数一直是一个不解之谜。

在维尔斯特拉斯之前几乎所有的19世纪研究无理数的数学家，都认为无理数是一个以有理数为项的无穷序列的极限，例如柯西在《分析教程》中就定义有理序列的极限是无理数。这个明显的逻辑错误（因为那个极限不一定是无理数，而且把无理数当成是已经定义过的概念了），竟在相当长时间内没有被发现。

为了避免无理数定义中的逻辑循环，维尔斯特拉斯从1859年开始，用静态观点首先引入“复合数”概念，继而用复合数定义无理数。什么是复合数呢？例如，$4\frac{2}{5}$由4α和2β组成，其中元素$\alpha=1$是主单位，元素$\beta=\frac{1}{5}$。一个数决定于由何种元素组成以及每个元素出现的次数。而无理数比如$\sqrt{2}$就可定义为1α，4β，

1γ…。在这里，假设任意有限个元素之和小于某个有理数。

德国数学家康托尔用有理“基本序列”等价类定义无理数。他在1883年的一篇论文中，引进了一个新的数类——实数，它包括有理数和无理数。康托尔要求有理数列S_n满足条件：对任意的正整数m，一致地有$\lim_{n\to\infty}(S_{n+m}-S_n)=0$，则基本序列$S_n$定义一个实数。通过基本序列，康托尔建立了实数概念（如零、正数、负数等）及其关系（相等、大于、小于），并证明了实数系是一个完备系。

1872年，德国数学家代德金发表《连续性和无理数》，以崭新独特的方式——从研究连续性的本质入手，以有理数为基础而建立了完整的实数理论。代德金的工作明确了“连续统”概念，被称为划时代的贡献，因而1872年被确认为数学分析基础完成的一年。

代德金是在直线划分的启发下来定义无理数的。他发现直线上所有点能构成连续统，所有的有理点不能构成连续统。他以所谓的“代德金分割”定义了有理数和无理数，而且对应于每一个分割存在的无理数或有理数是唯一的。他把直线是连续的作为公理，然后将这个思想用于实数系（有理数与无理数的合称），对实数系进行分割便得到了同直线上点的分割完全一致的实数连续的结论。接着，他又在定义了不等关系的基础上证明了实数的性质（传递性、致密性、三歧性、度量性等），定义了实数的运算，建立了实数的加法、乘法交换律和结合律。

代德金对无理数的定义，一反人们对数的传统理解，因而没有得到普遍的支持。当时的数学家几乎都认为用逻辑定义出来的无理数是一个智慧的怪物。就连数理逻辑理论的创始人之一赫尔曼·汉克尔（Hermann Hankel，1839—1873）也怀疑无理数理论的正确性，他认为“即使是完全严密的形式去处理无理数的每一个尝试，也必然导致最玄奥和麻烦的人工做作，它们是不会有

较高的科学价值的”。

维尔斯特拉斯、康托尔和代德金所发展的无理数理论，是实数的三大派理论。耐人寻味的是，他们竟“几乎一字不移地追随着欧多克斯的思想方法”（斯特洛伊克：《数学简史》，科学出版社，1956年）

对有理数理论的研究是在无理数理论的推动下进行的。维尔斯特拉斯1859年就提出了把有理数和实数建立在自然数基础上的正确见解。次年，他引入了正有理数为自然数对、负整数为另一类型的自然数对、而负有理数为一对正负整数的定义，这就表明建立有理数的关键问题在于采取有关步骤来构造整数并确立整数的性质。但是，维尔斯特拉斯等人认为，对自然数已不可能再作逻辑分析了。德国数学家克罗内克在1886年说的话也许更为典型：“上帝创造了整数，而其它一切都是人造的。”

代德金特别是意大利数学家皮亚诺在对整数进行逻辑分析的道路上迈出了具有决定性影响的、干净利索的步伐。代德金在《数的性质和意义》（写于1872—1878年，发表于1888年）中，用集合论思想给出了一个整数理论，由于处理太复杂而未引起人们的注意。皮亚诺在《算术原理新方法》（1889年）中，利用代德金的成果，以及集合论思想和公理化方法，在自然数公理的基础上简明扼要地建立起自然数系、整数系和有理数系。

皮亚诺是一位数理逻辑学家，他主张逻辑应成为数学的仆人（工具）。他创造了一系列符号，使推理干净利落：如“$\in$”表示属于；“$\supset$”表示包含；“N_0”表示自然数系；“a^+”表示a的下一个自然数等等。他从不加定义的原始概念“集合”、“自然数”、“后继数”和“属于”出发，给出了自然数的五个公理：

（1）1是自然数；

（2）1不是任何其它自然数的后继数；

（3）每一个自然数a都有一个后继数a^+；

（4） 若$a^{+}=b^{+}$，则$a=b$；

（5） 若S为一个含1的自然数集，且当S含有a时也含有a^{+}，那么S含有全部自然数。

皮亚诺采用了关于相等的自反、对称和传递公理，并给出了加法、乘法的定义，接着又建立了自然数的有关性质。在此基础上，给出了正整数、负整数和有理数的定义和性质。于是，皮亚诺完成了对整数的逻辑分析，建立了完备的实数系基础。由于他的方法适合19世纪末以后的公理化倾向，因而被人们广泛采用。

数学分析的严密化必然涉及对实数集合结构的理解，特别是涉及无穷集合、无穷过程、无穷小和无穷大这些无穷问题——它不仅是分析学的基础问题，而且也是数学基础、数学哲学的首要问题。潜无穷论者承认无穷小是极限为零的变量，而否定作为数量的实无穷小；承认无穷大是绝对值无限增大的变量，而否定作为数量的实无穷大。柯西、高斯等数学家都是反对实无穷的。最早肯定实无穷在数学和哲学中的合法地位的要算波尔察诺，他用一一对应方法证明了无穷集合可以等价于它的真子集。遗憾的是，他没有摆脱整体大于部分这一传统公理的束缚，从而又作了自我否定。他所认为的"无穷悖论"，实际上是未搞清楚后来称为集合的基数（势）的概念。

坚决地肯定实无穷并创立无穷集合论的是康托尔。从1866年起，康托尔放弃了对数论的研究而开始从事对有无穷多个间断点的函数的三角级数展开式唯一性问题（这是黎曼在1854年《论用三角级数表示函数的可能性》中提出的）的研究。1872年，他发表《三角级数论中一个定理的推广》，除了在唯一性问题上取得了进展外，还对实数理论进行阐述。他把实数理论和直线上的（实数）点的结构明确联系起来，并作为间断点问题分析的基础。这就自然地把康托尔引向关于无穷点集合的一般理论研究。

在康托尔之前，狄里克雷、黎曼等在用静态方法研究无穷多

个间断点在实数轴上的分布和结构时，已经酝酿了聚点、致密集、疏朗集等若干集合论概念。如今，康托尔定义了极限点和导集（点集A的极限点的全体所成的集A'），并以此为出发点对无穷集作了分类，不仅对直线上的点集或实数集合定义了闭集、开集、完全集和集合的并与交，而且还将这些概念推广到n维欧氏空间的点集。康托尔1872年的论文，标志着从间断点这一特殊问题的研究向点集合论过渡，从而使无穷点集成为数学研究对象的开端。

1874—1898年，康托尔发表11篇论文正式创立了集合论。在标志点集论诞生的论文《关于一切代数实数的一个性质》（1874年）中，康托尔引进了“可数集”和“基数(势)”概念，又用一一对应的方法将无穷集合分成不同等级。由此证明了超越数大大多于代数数；证明了除了和整数集合一一对应的可数集（一切代数数和部分无穷集是可数的）之外，还存在实数、超越数和一些无穷集这样的不可数集；证明了实数集和自然数集是两个基数不同的无穷集。

1877年，康托尔证明了n维空间中的点集与实直线上的点集构成一一对应关系。这使得他成为维数理论的开拓者，为点集拓扑度量空间理论开辟了道路。

1879—1884年，康托尔发表了总标题为《关于无穷的线性点集》的一组论文，标志着点集论体系的正式确立。他以非凡的创造力，在基数概念的基础之上引进了基数和序数的理论，特别是超穷基数和超穷序数，显示了康托尔惊人的智慧。他先后用两种方法构造了两个不同基数序列的超穷集。他指出，基数对有限集合来说就是所含元素的个数。对于无穷集合，例如自然数集的基数$\aleph$用$_0$表示，实数集的基数用C（连续统Continuum的第一个字母）表示。由于实数集不能与自然数集的子集一一对应，而自然数集却能与实数集的某些子集一一对应，因此有$C>\aleph_0$。他还定

义了基数的和、积、乘幂以及序数（或序型）的加与积。康托尔讨论了超穷序数的分类与超穷基数的关系，超穷序数与自然数的关系，超穷序数的质因子分解和实数集的结构；定义了全序集、良序集，并建立了任意集合都能良序的良序定理。康托尔由序数理论，构造了基数序列为$\aleph_0$、$\aleph_1$、$\aleph_2$、…的超穷集。1899年，康托尔证明了“康托尔定理”：任一给定集合的一切子集所构成的集合（即幂集）的基数大于已给集合的基数。根据这个定理，他又构造了基数序列为$\aleph_0$、$2^{\aleph_0}$、$2^{2^{\aleph_0}}$…的超穷集。康托尔用幂集构造超穷集的思想，早在1891年发表的论文《集合论的一个根本问题》中已提出。当时他还以有名的对角线法证明了重要结论：(1)实数是不可列（不可数）的；任一可列集的幂集不可列；不存在最大基数。(2)定义在闭区间[0，1]上的实函数$f(x)$的集合的基数$f>$实数集的基数C。他还证明了$2^{\aleph_0}=C$，$2^C=f$以及$\aleph_1\leqslant C$。至于$\aleph_1=C$是否成立，亦即他提出的著名的连续统假设“可列集合的基数和实数集合（连续统）的基数之间没有其它基数”的猜想是否成立？他废寝忘食地证明，但未能成功。被称为现代数学巨人的德国数学家希尔伯特1900年把这个问题列为23个问题中的第一个。时至今日，该问题虽尚未圆满解决，但却引出后来意想不到的发展。

1895～1897年，康托尔发表《超穷集合论基础》，标志着他的研究已由点集论提高到抽象集合论。他把集合作为基本概念来定义其它概念，建立了比数集和点集更抽象的非公理化的抽象集合论的体系和内容。至此，康托尔业已完成了称为古典(或朴素)集合论的创建工作。

康托尔的集合论轰动了当时的数学界，同时也遭到只承认有限而否定无限的数学界头面人物特别是柏林大学教授克罗内克的强烈反对，他们甚至攻击康托尔是神经质的。正在德国小城市哈

留任大学教授的康托尔，正希望到柏林大学这所著名学府任教，但克罗内克挡住了他的进路。尽管有代德金、埃尔米特等少数数学家支持他，但终因巨大的精神压力加上为证明连续统假设而用脑过度，致使他患精神分裂症而于1918年病逝于精神病院。1891年克罗内克去世后，特别是1901年法国数学家勒贝格等一批法国学者把数学分析建立在集合论基础上而创立了测度论，大大发展了积分理论之后，康托尔的集合论才最终获得了世界的承认并获得极高的声誉。希尔伯特热烈赞美康托尔的超穷基数理论是"数学思想的最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美表现之一"。他大声疾呼："没有人能把我们从康托尔所创造的天国中赶走！"英国著名逻辑学家、哲学家、数学家罗素评价康托尔的工作"可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作"。这是因为，历史上人们多次统一数学的企图都以失败告终，而康托尔创造的集合论给数学的统一提供了一个新的基础。"集合"、"基数"、"序数"等概念揭示了"数"概念的本质属性，用集合的概念来给数的概念下定义，大大减少了数学中不定义的概念。集合论是人类认识史上第一次给实无穷建立起抽象的形式符号系统和确定的运算法则，给无穷概念带来了一次革命性的变革，并给逻辑和哲学带来了深远的影响。所以，维尔斯特拉斯和庞加莱等人都认为分析和函数论不仅可以算术化，而且已经找到了一个"绝对严格化"的基础——集合论。它使得经典数学分析的理论基础得以巩固、严密、精确而体系完整，而且还渗透于代数、拓扑和包括泛函分析在内的分析学等现代数学的许多分支，为这些学科贡献了奠基石，对现代数学的发展产生了无论怎样估价都不算过高的影响。

1900年，法国大数学家庞加莱在第二届国际数学家会议上宣称："今天在分析中只剩下整数，即有穷的或无穷的整数系"，"现在我们可以说，绝对的严格性已经达到了"。直至今天，经

典分析的理论仍然无可争辩。我们可以看出，自17世纪到19世纪近三百年的数学发展史，几乎就是分析学基础和数学哲学的历史，数学分析基础精确化是一项多么重要而又困难的宏伟工程！当然，随着现代数学的发展，20世纪60年代美国著名数理逻辑学家A·罗宾逊的非标准分析又让无穷小复活而重返数坛，表明了实数理论、分析学基础并没有最后终结（见“现代数学中的新学说”）。

Ⅱ．分析学的蓬勃发展

在简述完分析基础理论严格化之后，现在我们再回过头来叙述19世纪数学分析在其它方面的巨大进展。

19世纪初期，德国青年数学家高斯以系统的数论巨著《算术研究》（1801）开创了数学的新时代，紧接着又于1811年正式引入复变函数概念。1814年，柯西证明了在复数范围的幂级数具有收敛圆，并给出复变函数的柯西积分理论、留数理论及其在分析中的应用等，为建立数学分析的一个重要分支——复变函数论奠定了基础。复变函数是分析学技巧性发展的最为重要的新创造，这是柯西在数学史上的一大功绩。

拉普拉斯继承和发展了贝努里、德莫弗等人的工作，发表了作为近代概率论先驱的巨著《概率的解析理论》（1812）及其长篇说明《论概率的哲学论文》（1814），建立了研究大量随机现象的新学科——概率论。

傅里叶的著作《热的解析理论》（1822）研究了非均匀加热的物体中热的分布，发现了堪称数学史上最大胆最辉煌的思想之一——用特殊的（三角）周期函数来表示函数。他指出，每一个数学函数，无论多么复杂，总可以表示为某些简单的基本函数，

即相当于形成音乐中的纯音或有色光中的纯色的那些函数——的和。傅里叶级数及傅里叶积分是三角级数理论和调和分析的发端。因其方法的普遍性，它成了纯粹数学与应用数学中一切近代方法的源泉。对傅里叶概念的研究持续于19世纪的大部分时间，这个课题吸引了当时的大数学家如狄里克雷、黎曼、维尔斯特拉斯和康托尔等的兴趣。理论物理学家用这个新工具来改造经典物理。数学家如康托尔则在对傅里叶方法的深入探索中，发现了无穷集合这个广大而又未为人知的世界。狄里克雷对傅里叶由热传导理论引出的任意函数可展成三角级数这一结论给出严密证明，开创了三角级数理论的研究；他还努力简化高斯数论，把分析学方法用于二元二次类型数的计算，引入所谓狄里克雷函数。现在，调和分析已是现代数学最重要的分支之一，傅里叶级数运用于一切物理学、数学或工程技术。

挪威青年数学家阿贝尔和德国数学家雅可比1829年同时发现椭圆函数而轰动一时。阿贝尔的成就还有：建立了阿贝尔积分和一系列关于幂级数收敛性的著名定理；引入了阿贝尔函数；证明了5次方程根式解的不可能性，而阿贝尔方程能用代数方法求解；并发展了包括代数域的扩张等必要的代数基础，等等。无论在分析学还是代数学上，阿贝尔都达到了当时的最高水平。他的全部著作镌刻着无限的创造天才和非凡的、有时是惊人的思维力量。他在19世纪最有影响的德国数学刊物《克列尔杂志》上发表的几十篇论文，绝大多数都在数学史上占有突出的重要地位，它们使《克列尔杂志》获得了永恒的荣誉，一直出版到今天。可悲的是，阿贝尔的光辉成就，却因其太年轻而受到当时的科学界权威高斯等人的藐视和冷遇。尽管当时的四位法国科学院院士采取非常步骤，同时上书向当时的挪威——瑞典国王请愿，但终究未能改变阿贝尔贫病交迫的处境。1829年4月，这位27岁的数学奇才，在劳累、疾病、债务的折磨下猝然早逝。

19世纪50年代，黎曼和维尔斯特拉斯开创了函数论的新时期，揭开了19世纪数学新阶段的序幕。具有非凡天才和丰富想象力的德国数学家黎曼比阿贝尔幸运——他的天赋和勤奋很快被高斯看中，并成为高斯晚年的高徒。1851年，他的博士论文《单复变函数论的基础》使他赢得了第一流数学家的声誉，这时他才25岁。黎曼的复变函数思想产生于对平面电流流动的研究，他提出的黎曼面概念使其对多值函数的处理获得了关键思想，从而发现了一个广阔的数学新天地。1857年，黎曼接连发表多篇研究阿贝尔积分、阿贝尔函数的论文，在此课题上获得了重要进展，他还发起复变函数论中另一个新的研究方向即阿贝尔积分的反演。黎曼于1854年写出了具有重要意义的《三角级数论》和《几何学的基本假设》的论文，特别是后者发展了非欧几何体系（将在介绍几何发展情况时详述）。他对偏微分方程和解析数论等作了开创性的贡献。这位未满40岁就病逝的“德国光辉的数学家”，为数学的发展建树了划时代的功勋。

维尔斯特拉斯除了在数学分析精确化方面做出了杰出贡献外，在中学任教时还发表了关于解析数论基础的重要论文(1855)。他与黎曼同时以椭圆函数的形式完成了20年代柯西开创的解析函数论。特别是他把幂级数作为复变函数论的基础，使之成为严谨的理论。他还改造了变分法，他的批判方法使他发现了令人大吃一惊的“病态函数”，例如处处不可微分的连续函数$f(x)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(a^n\pi x)$$，以及能填满平面一部分的皮亚诺曲线等。

在数学思想方面，与黎曼利用几何和物理直观相反，维尔斯特拉斯则重视严密的解析表现。在晚年，他作为数学界权威而受到尊敬。

柯西在建立数学分析严密概念的同时，对常微分方程初值问

题解的存在性、唯一性首先给出严格证明，深化了微分方程理论（由此深入，开创了常微分方程解析理论这一分支）。刘维尔在40年代证明了黎卡提方程一般不能用初等积分解出。而斯图姆1836年的工作提出了对解进行定性研究的最初思想。法国数学家庞加莱1881至1886年的一组论文《微分方程所定义的积分曲线》和俄国数学家李雅普诺夫1892年的巨著《运动稳定性的一般问题》，共同奠定了微分方程的稳定性理论的研究基础，而微分方程稳定性理论是数学分析中最重要的分支之一。庞加莱侧重于几何、拓扑的观点，而李雅普诺夫侧重于运用严格的分析方法。稳定性理论的建立，加上19世纪中叶法国的普阿松、傅里叶、柯西和俄国的奥斯特洛格拉特斯基对数学物理学方程的深入研究，形成了偏微分（数学物理）方程的一般理论。庞加莱是19世纪末20世纪初数学界的领袖人物，是继高斯和柯西之后无可争辩的大师和世界著名学者。他的工作涉及数学各个分支，但以开创拓扑学及分析学在理论物理学上的应用为中心。使他获得最大声誉的是"三体问题"的研究，它为天体力学开辟了新时代，整整半个世纪无人能够超越他。对相对论和量子理论，他也作出了具有启发性的贡献。

俄国数学家切贝晓夫在19世纪下半叶，对概率论、数学分析、内插法理论的发展作出了创造性贡献，提出了许多当时全新的课题，例如发现了概率论的一个基本原理"切贝晓夫大数定律"；创立了数学分析的新分支——用初等函数逼近复杂函数的"函数逼近论"；成功地证明了18世纪还无人知晓的结论："微分二项式积分时，只有三种情况能利用代数与对数符号积出"；特别是，在发展阿贝尔和其他前辈数学家的思想时，他解决了在有限形式下积出椭圆积分的难题。

最后，应该谈到载入史册的最早的女数学家——俄罗斯的索尼亚·柯瓦列夫斯卡娅。她为了能在大学学习，不得不在名义上

与人结婚，因为当时规定未婚女子不能入大学读书。1874年以前，她在维尔斯特拉斯的指导下，进行了多项有价值的研究：《偏微分方程理论》获得了微分方程理论的一个主要定理（柯西一柯瓦列夫斯卡娅定理）；另一部著作中，更确切地解决了拉普拉斯早就提出的一些问题；在第三本著作中，给出了阿贝尔积分的简化形式。1888年，她的著作《固体绕点旋转问题》赢得了世界性的声望。柯瓦列夫斯卡娅的研究涉及力学和微分方程的许多有意义的问题，对俄国、法国学者大量深入的研究是一个推动力。她的成果在数学、力学和物理学的有关问题中，至今仍然起着很大的作用。

Ⅲ．抽象代数学的先驱业绩

19世纪代数的概念、方法、对象和范围都发生了巨大变化。上半叶的主要成就是方程理论使种种设想找到解出四次以上方程的一般公式的尝试宣告结束。在世纪下半叶，数的概念得到极大发展；第一次引进了向量概念；确定了抽象代数学的基本概念和目标。

（1）伽罗瓦理论的全新刺激

16世纪由意大利数学家菲洛和塔尔塔里亚得到三次方程，费尔拉里得到四次方程的一般解法之后，四次以上的方程即$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$（$n>4$）的求解问题，经历了250年之久而毫无进展。拉格朗日在用某种统一的观点分析了二次、三次、四次方程的根式解结构之后，提出了方程的预解式概念，并且进一步发现预解式和诸根排列置换下的形式不变性有关。他因此得出结论说：一般高次方程的可解性问题最终归结到诸根的排列置换

性质的问题。而且他还设想了一种理论上的利用根式求解方程的步骤。但是当他以此设想解决五次方程时却无法成功而只好放弃。鲁菲尼探索一般五次方程根式解法的思路方向无疑是正确的，但是他对其中一个关键性命题却未加证明。这个关键性命题就是后来阿贝尔成功证明了的“阿贝尔定理”。19世纪初，挪威天才的青年数学家阿贝尔从十几岁起就试图解决五次方程求解问题，经过复杂的工作，终于在22岁时即1824年证明了一个重要的原理：除了系数取特殊值外，一般的高于四次的方程不能用开方法求解(阿贝尔定理)。其证明方法已陈旧过时，而且论文中还有一点关于函数分类的无关紧要的小错误，更精细的证明是阿贝尔在1829年去世前发表在《克列尔杂志》上的论文中阐述的。半个世纪后的1879年，德国数学家克罗内克在阿贝尔的基础上又给出了一个简明、直捷、严格的证明。阿贝尔的工作在数学史上是一项了不起的重要成就。

但是，如何判断哪些方程可以用根式求解呢？此问题的完全解决是历史上最年轻的天才数学家、法国的伽罗瓦作出的。伽罗瓦在拉格朗日、阿贝尔、高斯、柯西等人成果的启发下形成了独特新颖的研究思路，他发现了用根式构造代数方程根的一般原理——伽罗瓦基本定理：给定一个代数方程，假设G是该方程的伽罗瓦群（方程根的某个置换群），它的一系列最大正规子群为$H_k(k=1, \cdots, S)$，即$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_s$，($H_s$为单元群)，则原方程可用根式求解的必要与充分条件是，下列诸指标$[G/H_1]$，$[H_1/H_2], \cdots, [H_{s-1}/H_s]$都是素数。这里，伽罗瓦的基本思想方法要点可归结为三点：第一点，把层次式结构的形式同域的不断扩张概念联系起来；第二点，把每一层次的对应域的形成要素归结为预解式和预解方程的寻求；第三点，把预解式的寻求归结为置换群的各阶子群的结构分析。特别重要的是第三点，即伽罗瓦的主要思想是要设法绕过既无明确方法或法则又需要很大技巧的

拉格朗日预解式。伽罗瓦继承和发展了拉格朗日将问题转化的思想（把预解式的构成同置换群联系起来的思想），十分彻底地把全部问题转化为置换群及其子群结构分析的问题，从而取得了第一个突破。引入正规子群的概念，并发现对应的置换群必须是正规子群且指标应是素数，从而取得了第二个突破。这样，伽罗瓦终于成功地克服了拉格朗日预解式带来的困难，建立了代数方程的一般形式的可解性理论。

伽罗瓦不仅建立了方程的根式可解性判别准则，而且他对置换群引进的一些重要概念（如正规子群、单群、复群以及群与群之间的同构等概念）还为开辟抽象代数学的道路建立了划时代的光辉业绩。但是，这位伟大的年轻数学家和阿贝尔的命运同样悲惨，他的重要著作没有受到当时已成为权威的大数学家柯西和傅里叶的重视，甚至被他们丢失了。而法国科学院院士普阿松在审查《关于用根式解方程的可能性条件》时，花了四个月也未看懂，草率地签了“不可理解”的评语而将论文退给伽罗瓦。伽罗瓦21岁时不幸死于政敌设下的决斗圈套。决斗前夕，他仓促将自己生平的数学研究心得扼要写出，请朋友把它们送请居于高位的雅可比和高斯审查，并附了一封使人伤感的信：“你可以公开地请求雅可比或者高斯，不是对于这些定理的真实性，而是对于它们的重要性表示意见。在这以后，我希望有一些人将会发现把这堆东西注释出来对他们是有益的。”这些论文在伽罗瓦死后14年，由法国数学家刘维尔发现后才得以发表。而第一次给伽罗瓦理论一个清楚完整的叙述，是在伽罗瓦死后38年即1870年由法国数学家约当完成。伽罗瓦理论开辟了代数学的崭新领域——群论，给代数学以全新的刺激，使之获得了新的原动力，改变了代数发展的进程并把它引上新的轨道，因而被公认为19世纪数学最突出的成就之一。它在数学上有十分广泛的应用，一些新的数学分支例如自守函数学说、黎曼面概念等都是在它的基础上产生的。由伽

罗瓦理论发展起来的研究课题一直持继到今天。

（2）群论进入数学中心

群的抽象定义应属于英国数学家凯利。他在1854年首先提出抽象群概念。但并未引起反响。1870年，克罗内克给出群论公理结构，成为研究抽象群的出发点。克罗内克崇拜阿贝尔的工作，早年致力于代数方程的研究，发现有理数域的每一个阿贝尔扩张都包含在割圆域内，1857年他就猜想在椭圆函数具有复数乘法的模方程与虚二次域上的阿贝尔扩张之间也有类似关系，并称之为"青春之梦"。这个猜想在63年以后才被日本著名数学家高木贞治彻底解决。70年代末，约当、弗洛伯尼、斯蒂克贝格尔、伯恩赛德发展了群论，特别是有限群论。法国数学家约当1870年出版的《论置换与代数方程》是第一部系统论述群论和伽罗瓦理论的教程，他引入了商群的概念，并第一次研究了无穷群。伯恩赛德的经典著作《群论》(1897年出版)，至今保有其价值。德国数学家克莱茵在其《爱尔兰根纲领》（1872）中，强调了群论在几何学中的意义，企图以群的观点统一各类几何学。1880年，克莱茵和庞加莱发现了自守函数，这是由群论得到的重大结果。自守函数理论解决了解析函数的单值化问题。同年，曾与克莱茵一起工作过的挪威数学家李·索夫斯开创了连续变换群论，发现了"李群"，把群与几何联系在一起，为连续群的经典理论奠定了基础。这种理论在微分几何学和微分方程中都有应用。由于群论用作几何论据的研究成果，李曾荣获俄国喀山大学颁发的罗巴切夫斯基国际奖。

纳托在《置换理论及其对代数的应用》（1882）中，研究了置换群，并提出了同构、同态概念。英国的冯·代克于1882年把群论的三个主要来源——方程式论、数论和无限变换群纳入统一的概念之中，并提出"生成元"概念。韦伯在赞同群的抽象观点

的基础上，于1893年开始了域的抽象理论的研究，强调群和域是代数的两个主要概念。德国代数学派的库莫尔在研究费尔马大定理时创立了理想数，最后发展为代德金的理想论，代德金清楚地看到了理想和域这种结构的重要价值。

在19世纪，已经知道的群的类型有：有限阶不连续群（置换群是典型例子）、无限不连续群、有限连续李群、由微分方程定义的无限连续李群；可解群、单群、复合群等。已经知道的域有：有理数域、实数域、复数域、代数数域、单变量或多变量的有理函数域、p一进域等。而环和理想的构造虽被利用过，但其抽象理论却是在20世纪初建立的。至此，群论进入了数学的中心，它为20世纪抽象代数学理论的系统发展奠定了基础。

（3）高等代数系统化与"早产儿"逻辑代数、超复数

高斯22岁时（1799年）在博士论文中证明了"代数学基本定理"之后，又于1831年引入复数的向量表示，建立了复平面的复数的代数学。1841年，德国数学家雅可比建立了系统的行列式理论。1857年，英国数学家凯利发明了矩阵代数——乘法不满足交换律的不可交换代数。1864年，克罗内克引进"秩"的概念。这样，包括古典多项式理论和线性代数（来源于欧氏几何、解析几何及线性方程组）的高等代数形成了系统化理论。

几乎同时，英国数学家布尔于1847年发表《逻辑的数学分析》，建立了对逻辑规律进行数学的分析的布尔代数（逻辑代数）。而历史上第一个不可交换代数是在微分方程、泛函分析和分析力学方面成就显著的英国数学家、物理学家哈密顿手中诞生的。1843年，哈密顿在爱尔兰科学院宣布了"四元数"代数诞生。这是他经过15年的冥思苦想之后，在都柏林皇家运河边散步时"一闪念间"所获得的思想。我们知道，高斯1831年论述了用直角坐标系的复平面上的点代表复数 $a+bi$ 的方法，使复数得到

了清晰直观的表示。这是数学家们寻求了二百多年才得到的成果。但哈密顿不满足于复数的直观表示，而将注意力放在复数运算的逻辑关系及抽象实质上。通过哈密顿的天才处理，复数的运算用序偶重新给出了定义。他企图仿照已建立的复数系，找到三维复数来表示空间向量，但总是在如何定义乘法时，试图保持交换律上陷于困境。最后，终于直觉地悟解到在实系数基础上建立起来的有实数和复数各种性质的三度空间内的几何运算，没有三维复数，而只有四维复数即“四元数”，其形式为$a+bi+cj+dk$，记为有序实数四元数组（a，b，c，d），i，j，k为单位向量。这个超复数系不具备乘法交换律。哈密顿的伟大著作《论四元数》发表于1853年，《四元数讲义》发表于1857年。由于他首次引进向量的概念而成为向量理论和向量计算的创始人。哈密顿还把四元数引入微积分领域，定义了描述函数的数量与方向等方面变化关系的概念“梯度”、“散度”、“旋度”、“聚度”，这些是研究多元函数极为重要的基本概念。哈密顿认为四元数和微积分同等重要，将在数学物理中引起巨大的变革。四元数一反当时所有数的乘法都具有交换性的传统，在代数史上具有革命性。它的发现引导初等代数向着高等代数发展，把研究对象由实数拓展到将实数、复数包括在内的更加抽象的多元数。当然，哈密顿是在寻找三维复数时得到四元数的非交换代数的，但未能证明三维的交换代数不存在。复数域扩张的不可能性是由高斯指出的。

正当哈密顿建立四元数时，靠自修取得数学教师资格的德国青年数学家格拉斯曼1844年发表了《线性扩张论》，用超复数方法扩大数的概念。他首次提出关于多维欧氏空间理论的系统学说，引入了矢量的数量积。他考虑了n个分量的超复数的内积、外积以及高阶乘积。在1855年的一篇文章中，格拉斯曼对超复数定义了16种不同乘积及其几何意义和在力学、磁学、晶体学方面的应用，由几何坐标变换某些不变性与超复数结合，得到了在数

学和相对论中都具有重要意义的张量的概念和理论。1862年，格拉斯曼还提出了矩阵（含复数）化成三角式的方法，并论述了这种简化与射影变换分类之间的关系。格拉斯曼是数学中形式主义的奠基人之一。这种形式主义后来在希尔伯特学派中发展成为现代数学哲学流派的形式主义观点。

代数发展史上，除了非交换代数外，还有不满足结合律的代数——若当代数和李代数。

毋庸置疑，凯利、哈密顿、格拉斯曼以推出不同于普通代数的遵守某种结构规律的代数的方法，是对代数学的一次革命，打开了现代抽象代数的大门。但是，逻辑代数、四元数、扩张论在当时都未得到数学、物理学界的注意和理解，它们是时代精神的力量压出来的早产儿。19世纪后期，数学家才陆续得到了一些关于超复数结合代数有原则性意义的理论，物理学家才将它作为研究物理学、工程学的重要计算工具，著名英国物理学家麦克斯韦（哈密顿的学生）通过四元数理论，利用向量分析建立了著称于世的电磁理论。当代著名物理学家杨振宁博士前两年指出了四元数应用于理论物理的可能性。近年来，四元数在数论的研究中也得到了重要的应用。至于逻辑代数，当20世纪电子计算机开始发展时，才有了它的用武之地。

Ⅳ．非欧几何——几何学复兴的黄金时代

“19世纪最有启发性、最重要的成就是非欧几何的发现。”

——希尔伯特

（1）曲线、曲面论几何学的进展

在论述这个重要发现之前，我们应该从18世纪的大数学家克莱洛说起。法国数学家克莱洛具有非凡、杰出的天才，12岁时就向巴黎科学院提交了特殊曲线的报告，16岁（1729年）出版巨著《双重曲率曲线的研究》，这是对于处理空间曲线的解析和微分几何的最初尝试。它与欧拉的著作共同奠定了研究空间曲线的基础。30岁时（1743年）克莱洛发表《地球形状理论》，对这部关于流体的平衡和旋转椭圆体的吸引力的标准著作，拉普拉斯也只能在次要条目上进行改善。他还首次引进曲线积分概念和多元函数全微分的概念——这是对线积分和微分方程论作出的贡献。

法国数学家蒙日由于对纯粹几何学的兴趣，于1795～1799年创立了画法几何学。1809年，他又把微积分学用于空间和曲面上，出版了第一本微分几何著作《分析在几何学上的应用》。蒙日是一个专门的几何学家，他的偏微分方程理论也具有明显的几何学色彩。另一方面，他又用偏微分方程的语言来说明几何事实。

射影几何学则是由蒙日的学生、法国数学家彭色列创立的。1822年，彭色列沿着蒙日的方向，创造性地在欧氏平面上添加所谓无穷远直线而得到射影平面。发表了《图形的投影性质论》这部巨著，创立了几何图形在投影变换下的不变性质的射影几何，这门学科在19世纪后半叶成为几何的中心。在德国，梅比乌斯、斯坦纳、普吕克等继承、发展了彭色列的工作，斯坦纳运用综合法研究代数曲线和代数曲面，普吕克引入射影坐标，从而扩大了解析法在几何上的运用。30至40年代的新几何学，是由德国数学家史陶特和法国数学家沙勒发展的。

德国大数学家高斯不仅在前面已提到的数学分析、代数、数论（独立发现二次互反律）等领域有惊人的成就，而且在进一步发展几何学思想中也有不凡的建树，他将自己的二项方程解法的理论应用于作正多边形，从而解决了古希腊时代遗留的难题，1820年以后，高斯主要研究天文学、大地测量学和电磁学，获得了丰

硕成果。他还研究与数学应用有关的最小二乘法、曲面论、位势论等。最小二乘法，曾经是勒让德和拉普拉斯的研究主题。1827年，高斯发表《关于曲面的研究》，用与蒙日大相径庭的方法，奠定了曲面内在几何学的基础。高斯一生中发表的论文有115篇，还有大量论文未发表。高斯是19世纪前半叶最伟大的数学家的代表，当时与高斯匹敌的数学家只有柯西。后人感叹说，高斯是能通晓整个时代全部数学的最后一人。

（2）罗氏几何、黎曼几何——影响数学本性的发现

19世纪20年代，数学史上出现了一大盛事：高斯和俄国的罗巴切夫斯基、匈牙利的鲍耶几乎同时而相互独立地发现了非欧几何学。欧几里得几何诞生二千多年来，作为一个登峰造极的数学杰作屹立于世，一直被奉为不可动摇的经典，因其论证的严格性被誉为完美无暇。然而，19世纪的数学的严格性标准大为提高，欧氏几何的逻辑缺陷逐渐暴露出来：

一、用了重合法来证明全等。这个方法有两点值得怀疑：一是用了运动的概念，这是没有逻辑根据的；二是默认图形从一处移到另一处时所有性质保持不变，而要假定移动图形而不致改变其性质，就要对物理空间设定很多前提条件。

二、有些定义不自足，即往往使用一些未加定义的概念去对别的概念下定义；有些定义是多余的；有些概念含糊不清，开头关于点、线、面的定义不严格，它们应当是不定义的初始概念。

三、引用了从未提出而且无疑是未发觉的假定。

四、证明不严格，有些定理的证明过程往往依赖于图形的直观。《原本》没有区别感性直观与科学抽象，对感性直观过分依赖，因而缺乏数学的严格性。

五、特别重要的是，公理法尝试没有完全成功。第五公设（平行线公理）在陈述与内容上复杂、累赘，缺乏说服力，并不

自明。

关于对欧氏《几何原本》缺陷的系统的现代批判和改造，我们将在下一节希尔伯特建立"五群公理"中论述。这里，先论述对第五公设（平行公设）的研究。

两千多年以来，欧氏第五公设一直占据着人们思想的中心，人们对它产生了极大怀疑：一条直线是否能无限延长？如果二直线无限延长，是否既不平行又不相交，而是无限地接近？因此，平行公设是否正确地反映了空间形式的性质？对此，从希腊时代到18世纪有两种研究途径：第一种，用更自明的命题来代替平行公设。遵循此途径的数学家们提出了一些公理，在直观上似乎更加不证自明些，但实际上这些代替公理并不真正令人满意。第二种，从其它九条公理和公设推导出平行公设。这种尝试使数学家徒劳地忙碌了两千多年，并在近代数学最有影响的一些发展中达到高潮。但是，所构想出的每一个证明不是包含了某个根本性的逻辑谬误，就是隐含地假设了等价于欧氏第五公设的命题。

由意大利数学家萨谢利1733年发表的《欧几里得无懈可击》，瑞士数学家兰伯特1766年写的《平行线理论》以及法国数学家勒让德的《几何学基本原理》，称得上关于平行公设的真正有价值的研究成果。萨谢利从一个四边形$ABCD$(其中$\angle A=\angle B=$直角d，$AD=BC$）出发，考虑$\angle D=\angle C<d$或$>d$或$=d$的三种假定情况。兰伯特类似于萨谢利的研究，但更进了一步，他以一个包括三个直角的四边形（萨谢利四边形的一半）作为基本图形，考察第四个角是锐角、直角或钝角三种假定情况。勒让德则从三角形内角和小于、等于或大于两直角这三种假定入手。他们考虑的都不是欧氏平行公设的陈述，而是它的等价形式。他们分别证得了钝角假定或三角形内角和大于两直角假定时必然导致矛盾，又分别证得了直角假定或三角形内角和等于两直角假定时均与平行公设等价。他们都试图用归谬法分别证出在锐角假定或三

角形内角和小于两直角假定下导致矛盾，这样平行公设就获证。但是，他们除了获得大量那些不合常理的结论（实质上就是非欧几何的定理）之外，始终未导出希望的“矛盾”来。萨谢利的失败是由于硬把站不住脚的涉及无限元素的模糊概念的矛盾塞进推理中，使推理产生了某些根本性的逻辑错误。如若他不是这样而是承认解释不了矛盾的话，非欧几何的发现之功就归于他了。

19世纪的数学家从前人的屡次受挫中得到了启发，他们从否定平行公设来考虑问题并取得了巨大的成功，即在绝对几何（与欧氏第五公设无关的几何学）公设中添加一条与第五公设相反对的公理取而代之，并未导致矛盾。1816年，被称为“数学王子”的高斯最早认识到平行公设独立于其它公理和公设，而且认为由此推出的三角形内角和等于两直角未必与实际测量的结果一致。鲍耶（1823）和罗巴切夫斯基（1826）证明了平行公设不可能由其它公理推导出来。他们构造了一个所谓非欧平面E^*，在E^*中除平行公设不成立外，欧氏平面E中的所有其它公理都成立。E^*有突出的特性：

（i）经过直线外一点可作无限多条与已知直线不相交（并以这个公设来代替第五公设）。

（ii）三角形内角和恒小于两直角，所小的角度值与三角形面积成正比。

（iii）不同大小的三角形恒不能相似。

（iv）圆周长与直径之比恒大于π，所大的数值随面积的增加而增大。

（v）与欧氏几何一样，一条直线恒可以不受限制地延伸得越来越长。所以，罗巴切夫几何空间同欧氏空间一样，在广延上是无穷的。

高斯虽然早就发现了非欧几何，但他害怕因离经叛道而惹祸，害怕新理论不为人们理解而受到嘲笑，一直没有勇气公开提

出来，并中止了对自己思想的整理和进一步研究。甚至在鲍耶和罗巴切夫斯基提出这个问题后，也不敢公开支持。鲍耶因未得到其父亲（终生从事第五公设研究的数学家）和高斯的支持而陷入失望，并失去了在创立非欧几何工作中的领先地位。而23岁就成为喀山大学数学教授的罗巴切夫斯基，在33岁（1826年2月12日）时公开宣读著作《平行线理论和几何学原理概论及证明》，宣告非欧几何（命名罗氏几何学）创立。他对围攻、谩骂从不屈服，他不断发展自己的思想，不断出版著作。《纯数学 教学 评 论》（1824～1826）、《几何学原理》（1829）、《虚几何学》(1835)、《虚几何学在一些积分上的应用》（1836）、《几何学新原理与完整的平行线理论》(1835～1838)、《平行线理论的几何学探讨》（1840）、《泛几何学》（1855）等著作，建立起了罗氏非欧几何学整个宏伟的大厦，开始了几何的原则上的新发展，改变了对几何的本质理解，扩大了几何的应用对象和范围，在数学史上开创了现代数学时期。

继罗巴切夫斯基之后，德国数学家黎曼在非欧几何学的方向上取得了最重要的进展。他的著名论文《论几何学的基本假设》(1854)，提出了更广泛的一类非欧几何学——黎曼几何，即牵涉到更复杂的假定的钝角假设的椭圆式几何。它与欧氏、罗氏几何都不同，既否定了欧氏第五公设，也否定了直线可任意延伸的假定。黎曼几何中，过直线外一点不能作与已知直线平行的任何直线，即每两条直线都有一个交点，因而无平行线；三角形内角和恒大于两直角，所大的角度值与三角形面积成正比；圆周长与直径之比恒小于π，且随圆面积增加而减小。黎曼引入n维流形、黎曼空间及曲率、黎曼面的概念。他的思想是后来问世的广义相对论在数学上的出发点，对拓扑学的发展也有重要的促进作用。

罗氏几何、黎曼几何这两种非欧几何的发现引起了震动。它们的思想，看起来很不合常理，与习惯的直觉空间观念不符，过

去一直设想欧氏几何是唯一的、必然的。直到1868年即发现罗氏几何42年、发现黎曼几何14年之后，由于微分几何和射影几何的发展提供了解释非欧几何的条件，意大利数学家贝尔特拉米在欧氏空间的伪球上给出作为罗氏几何平面有限部分的模型，并于1868～1869又提出用球面作为黎曼的二重椭圆几何的具体模型，凯利、克莱茵（1871)、庞加莱（1882)也提供了在欧氏系统中构造罗氏几何模型，从而通过欧氏几何的无矛盾性建立了罗氏几何的无矛盾性的事实，才使人们认识到非欧几何并非虚构。19世纪末，德国数学家闵可夫斯基发展了黎曼几何，创立了四维空时几何学。1915年，德国科学家爱因斯坦利用非欧几何——四维空时几何学为工具创立了广义相对论，不久广义相对论连同非欧几何学为天文观测等科学实践证实。由此，证明了人们生存的空间只是在小范围内可以被视为欧氏空间，而大范围空间及整个宇宙必须用非欧几何学来描述。至此，非欧几何取得彻底胜利。

非欧几何的发现，在数学史上具有划时代的意义。它不但为人类探索原子微观世界和恒星宇观世界的奥秘，认识和改造自然提供了新的强有力的数学工具，而且还为哲学的发展提供了重要的自然科学依据，这主要表现于：

一、非欧几何的发现具有重大的本体论意义。它打破了欧氏几何的绝对垄断地位，是影响数学本性的重大发现，它标志着人类对空间形式的认识发生了飞跃，从直观的空间上升到了抽象空间。从欧几里得到牛顿时代的两千多年里，欧氏空间被人们认为是唯一的、必然的、绝对的空间形式，牛顿物理学恰是建立在这种空间概念的基础之上。20世纪的著名数学家、哲学家怀特黑德说“这是一个有伟大意义的错误”，“上述错误把学术向前推进”。非欧几何的发现，表明了以前的空间观念是错误的，揭示了现实空间性质多样性的思想，几何体系的多样性就是这种多样性的反

映。欧氏几何反映了曲率$K=0$的平直空间，罗氏几何与黎曼几何则分别反映了曲率$K<0$或$K>0$的弯曲空间。非欧几何的发现不仅对后来的几何学发展显示了非凡作用，而且还为广义相对论奠定了基础。广义相对论认为，非欧几何的空间特性是由物质分布及其运动规律决定的（例如，太阳的巨大质量使周围空间弯曲），反过来非欧几何的空间特性又影响着物体的运动状态（例如，太阳周围的弯曲空间引起水星运动轨道产生近日点进动现象以及星光经过太阳附近发生偏折现象）。这就揭示了物质和空间的辩证关系，丰富了物质决定空间形式、空间形式又反作用于物质运动的新的哲学原理。

二、非欧几何的发现具有重大的方法论意义。首先，它提供了对应原理的重大科学依据。高斯曾指出，欧氏几何是罗氏几何（高斯称为星形几何）中当常曲率$K\to\infty$时的极限形式，因而欧氏几何是罗氏几何的特例，按照黎曼几何学理论，它统一了空间曲率分别为零的欧氏几何学、为负数的罗氏几何学和为正数的黎曼几何学，因而欧氏几何和罗氏几何又作为特例被黎曼几何所包容。这表明了欧氏、罗氏和黎曼几何三者是个别、特殊和普遍的对应关系。个别——特殊——普遍，这不但是几何学的发展形式，而且是一般科学理论发展的形式。上述对应关系和发展规律，在由近代科学向现代科学发展中，首次体现于非欧几何学。运用对应原理预测科学发展方向，指导科学理论研究的方法即所谓“对应方法”，在科学史上有特殊的地位和作用。

其次，非欧几何的发现，以根本上动摇了认为几何公理能够凭其表面的自明性而成立的传统观念，不仅为公理化方法的发展和完善奠定了基础，推动了几何基础理论中关于相容性、独立性、极小性和完备性等根本问题的研究（见下节希尔伯特“五群公理”），而且为公理化方法可以推广和建立新的数学理论提供了依据，推动人们把公理化方法当作普遍的科学方法加以研究。第一，

非欧几何诞生的第一步就在于认识到平行公设是独立于其它公设和公理的。因而，在一个公理系统中，我们可以把一个具有独立性的公理换为另外的公理从而得到一个新的公理系统。公理系统内部必须相容，但不同的公理系统之间却允许有相互矛盾（甚至是逻辑上的矛盾）的命题出现。这是现代一种重要的公理方法，我们只要改变原有科学体系中的某个（或某些）基本公理或原理，就可能创立出不同的科学体系来。第二，非欧几何的建立深刻地启示人们，可以证明"在一个给定的公理系统中某些命题不可证明"。我们在数学基础这一章中介绍的哥德尔不完全定理就是一例。第三，用模型方法建立了非欧几何相对于欧氏几何的相容性。模型方法成为现代的一种重要公理方法。它破除了"一个公理系统只有一个论域"的传统观念。第四，非欧几何系统已不是象《几何原本》那样依赖于感性直观的实质公理系统，它标志着从实质公理学（公理学的第一阶段）向形式公理学的过渡（第二阶段），从而为形式公理学（第三阶段）和元数学（第四阶段）铺筑了路基。非欧几何的创立，大大提高了公理方法的信誉，刺激许多数学家和科学家致力于公理方法的研究。

三、非欧几何的发现，还具有重大的认识论意义。它影响了不同哲学派别的对立和斗争，它所体现的理性思维的巨大力量，给培根—洛克为代表的狭隘经验论以沉重打击；它所显示的空间观念，不但是对康德唯心主义空间观的批判，也是对牛顿的绝对不变的脱离物质运动而独立的形而上学空间观的否定。它表明了人类理论思维（形式逻辑和哲学思维）在以科学假说的提出为主的科学发现中的巨大作用，说明了现代数学的形成也是理论思维和科学实践的辩证统一。

（3）克莱茵统一几何学到希尔伯特"五群公理"

由于射影几何学、非欧几何学的建立和发展，促使人们对于

几何学作统一的尝试。1872年，克莱茵——19世纪后半期在德国起领导作用的数学家之一，发表著名的《爱尔兰根纲领》从群论的观点出发，给出当时所知的几何学各分支的鸟瞰图。他把几何学看成描述图形在特殊变换群下不变性质的科学，从而用群的观点统一了各种几何学。他（还有凯利）提出：射影几何学引进度量就得到非欧几何学，因此欧氏几何学和非欧几何学都属于射影几何学。每一种几何学都具有一个双射群，这些双射群对应于欧氏几何学中的合同变换。

继法国数学家达布于1887年至1896年出版四卷《曲面的一般理论的讲义》，以精致的几何直觉和对分析工具的熟练运用，总结了曲线、曲面的微分几何一个世纪以来的研究成果，以及法国大数学家庞加莱1895年以论文《位置的分析》(Analysis Situs)奠定了代数拓扑学的基础之后，著名的德国数学家希尔伯特（他更多地属于20世纪，在现代数学部分，我们将多次提到他），于19世纪最末一年——1899年，发表了著名的《几何学基础》，对欧几里得几何的缺陷进行了系统的批判和改造——这是非欧几何出现所导致的必然结果。由于非欧几何的创立大大提高了公理化方法的信誉，导致许多数学家致力于公理方法的研究，例如1871～1872年康托尔与代德金不约而同地拟成了连续性公理，巴许1882年拟成了顺序公理。正是在这样的基础上，希尔伯特发表了《几何学基础》。希尔伯特大大改进了公理方法，给出了完善的初等几何的公理体系，克服了欧氏《几何原本》点、线、面定义不恰当因而不适合进行离开直觉的、严格逻辑的抽象研究以及公理系统严重缺陷等局限性。他对于原始对象不加定义，对于原始关系也不加定义，而只是通过公理来反映原始对象的原始关系，这些公理及其推论对于任何满足公理系统的对象都一概适用。在希尔伯特的逻辑分析中，点、线、面这些词完全是非特定的，他说："点、线、面可以换成桌子、椅子、啤酒杯。"任何事物都是用集合和关系

这种冷冰冰的逻辑语言来表达的，而图形的唯一目的就是为了阐明逻辑。图形也能够表示成为抽象的概念（例如，两个相互重叠的圆盘可表示两个完全任意的集合之并集和交集）。希尔伯特公理体系分为结合、顺序、合同、变换和平行“五群公理”。如果五群公理全部成立，即是欧氏几何；如果前四群公理成立而平行公理不成立，则称之为双曲非欧几何。简洁而严密的希尔伯特公理体系还揭示了几何学的各种关系。希尔伯特的公理化方法以及对公理体系独立性、相容性、极小性和完备性的要求，奠定了现代数学的主要方法，对20世纪数学的发展和形式主义数学基础研究，有着巨大的启示和影响。《几何学基础》也就成为近代公理化思想的代表作。

综上所述，19世纪数学的成就是巨大的。数学分析的理论基础严密化目的达到了，并且由于复变函数论的建立和微分方程论的发展而无可估量的扩大了。无穷集合论的创立为统一数学提供了新的基础。代数学受到伽罗瓦理论的全新刺激而获得了新的动力，为抽象代数学新阶段奠定了坚实基础。几何学发生了根本性革命而处于复兴的黄金时代。拓扑学系统理论诞生。数学爆炸成为上百个分支。19世纪数学的飞跃发展，标志着变量数学进入结束阶段而开始了现代数学发展的新时期。

世纪交替之际的1900年8月6日，年届38岁的希尔伯特在巴黎第二届国际数学家代表大会上，发表了堪称世界数学史上重要里程碑的著名演说。当时，希尔伯特正当科学创造活动盛年，业已在代数不变量（用纯粹的存在性证明解决“果尔丹问题”）、代数数域、几何基础、变分学等领域作出了举世闻名的第一流贡献。他和他的好友、数学家闵可夫斯基、赫尔维茨仔细斟酌、研究了整整8个月，决意认真总结19世纪数学的研究成果和发展趋势，展现出20世纪数学的诱人前景。他在演讲一开始，就发人奇思地说：“我们当中有谁不想揭开未来的帷幕，看一看在今

后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？"接着，希尔伯特站在当时数学研究的最前沿，高瞻远瞩地提出预示20世纪数学发展新进程的著名的23个研究问题，向世界数学界提出了一项有力挑战。虽然从实质上讲，这些问题是继承19世纪的数学传统，对20世纪数学主流不能说有很大关联，而具有继往开来的作用，但是，却刺激了整个数学界的想象力，持久地影响着20世纪数学的研究方向。希尔伯特的声望（现在只有庞加莱可与之匹敌）和判断力，使人们相信这些问题在今后的年月里一定能得到解决。大批数学家从此踊跃投入解决希尔伯特问题的行列之中。大数学家韦尔在希尔伯特逝世（1943年）后的悼词中说："希尔伯特就象穿杂色衣服的风笛手，他那甜蜜的笛声诱惑了如此众多的老鼠，跟着他跳进了数学的深河。"20世纪数学通过解决希尔伯特问题取得长足进展，当然，20世纪以来现代数学发展的广度和深度是十分惊人的，它远远超出了希尔伯特天才的预测。就在20世纪初，法国数学家勒贝格的测度论和积分论，希尔伯特的积分方程论，法国数学家弗雷歇的抽象空间理论，以诺特、阿廷、范德瓦尔登等人为代表的德国代数学派以及其他数学家关于代数学公理化理论的建立，连同组合拓扑学和点集拓扑学的出现，预示着以抽象代数学、拓扑学和泛函分析"三大支柱"为中心的现代数学翻天覆地的变化。

附：希尔伯特23个数学问题及其解决情况

（1）证明康托尔1878年提出的连续统假设。

1938年，侨居美国的奥地利数理逻辑学家哥德尔证明连续统

假设与ZF集合论公理系统的无矛盾性。1963年，美国数学家科恩证明连续统假设与ZF公理彼此独立。因而，连续统假设不能用ZF公理加以证明。在这个意义下，问题已获解决。

（2）算术公理系统的相容性。

希尔伯特曾提出用形式主义计划的证明论方法加以证明，哥德尔1931年发表不完备性定理作出否定。根茨1936年使用超穷归纳法证明了算术公理系统的相容性。

（3）只根据合同公理证明等底等高的两个四面体有相等之体积是不可能的。

德恩（M·Dehn）1900年已解决。

（4）两点间以直线为距离最短线问题。

1973年，苏联数学家波格列洛夫宣布，在对称距离情况下，问题获解决。

（5）拓扑学成为李群的条件（拓扑群）。

1952年，由格里森（Gleason）、蒙哥马利(Montgomery)、齐宾（Zippin）共同解决。1953年，日本的山辺英彦已得到完全肯定的结果。

（6）对数学起重要作用的物理学的公理化。

1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫将概率论公理化。后来，在量子力学、量子场论方面取得成功。但对物理学各个分支能否全盘公理化，很多人有怀疑。

（7）某些数的超越性的证明。

需证：如果α是代数数，β是无理数的代数数，那么α^β一定是超越数或至少是无理数（例如，$2^{\sqrt{2}}$和e^π）。苏联的盖尔封特(Gelfond) 1929年、德国的施奈德（Schneider）及西格尔（Siegel）1935年分别独立地证明了其正确性。但超越数理论还远未完成。目前，确定所给的数是否超越数，尚无统一的方法。

（8）素数分布问题，尤其对黎曼猜想、哥德巴赫猜想和孪

生素数问题。

黎曼猜想至今未解决。哥德巴赫猜想和孪生素数问题目前也未最终解决，其最佳结果均属中国数学家陈景润。

（9）一般互反律在任意数域中的证明。

1921年由日本的高木贞治，1927年由德国的阿廷(E·Artin)各自给以基本解决。而类域理论至今还在发展之中。

（10）能否通过有限步骤来判定不定方程是否存在有理整数解？

1950年前后，美国数学家戴维斯（Davis)、普特南(Putnan)、罗宾逊（Robinson)等取得关键性突破。1968年，巴克尔(Baker)、费罗斯（Philos）对含两个未知数的方程取得肯定结论。1970年，苏联数学家马蒂塞维奇最终证明：在一般情况答案是否定的。

（11）一般代数数域内的二次型论。

德国数学家哈塞（Hasse）和西格尔（Siegel）在20年代获重要结果。60年代，法国数学家魏依（A·Weil）取得了新进展。

（12）类域的构成问题。

即将阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意的代数有理域上去。此问题仅有一些零星结果，离彻底解决还很远。

（13）一般七次代数方程以二变量连续函数之组合求解的不可能性。

此问题已接近解决。1957年，苏联数学家阿诺尔德(Arnold)证明了任一在[0,1]上连续的实函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 可写成形式：$\sum_{i=1}^{9} h_i(\zeta_i(x_1, x_2), x_3)$，这里$h_i$和$\zeta_i$为连续实函数。柯尔莫哥洛夫证明$f(x_1, x_2, x_3)$可写成形式：$\sum_{i=1}^{7} h_i(\zeta_{i1}(x_1)+\zeta_{i2}(x_2)+\zeta_{i3}(x_3))$这里$h_i$和$\zeta_{ij}$为连续实函数，$\zeta_{ij}$的选取可与$f$完全无关。1964年，维士斯金（Vituskin）推广到连续可微情形。对解

析函数情形则未解决。

(14) 某些完备函数系的有限的证明。

即域K上的以x_1，x_2，…，x_n为自变量的多项式f_i（$i=1$，…，m），R为$K[X_1, \cdots, X_m]$上的有理函数$F(X_1, \cdots, X_m)$构成的环，并且$F(f_1, \cdots, f_m)\in K[x_1, \cdots, x_m]$试问$R$是否可由有限个元素$F_1$，…，$F_N$的多项式生成？这个与代数不变量问题有关的问题，日本数学家永田雅宜于1959年用漂亮的反例给出了否定的解决。

(15) 建立代数几何学的基础。

荷兰数学家范德瓦尔登1938年至1940年，魏依1950年已解决。

(16) 代数曲线和曲面的拓扑研究。

此问题前半部涉及代数曲线含有闭的分枝曲线的最大数目。后半部要求讨论$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$的极限环的最多个数$N$（$n$）和相对位置，其中$X$、$Y$是$x$、$y$的$n$次多项式。对$n=2$（即二次系统）的情况，1934年福罗默尔得到$N(2)\geqslant 1$；1952年鲍廷得到$N(2)\geqslant 3$；1955年苏联的彼德洛夫斯基宣布$N(2)\leqslant 3$，这个曾震动一时的结果，由于其中的若干引理被否定而成疑问。关于相对位置，中国数学家董金柱、叶彦谦1957年证明了（E_2）不超过两串。1957年，中国数学家秦元勋和蒲富金具体给出了$n=2$的方程具有至少3个成串极限环的实例。1978年，中国的史松龄在秦元勋、华罗庚的指导下，与王明淑分别举出至少有4个极限环的具体例子。1983年，秦元勋进一步证明了二次系统最多有4个极限环，并且是（1，3）结构，从而最终地解决了二次微分方程的解的结构问题，并为研究希尔伯特第（16）问题提供了新的途径。

(17) 半正定形式的平方和表示。

实系数有理函数f（x_1，…，x_n）对任意数组（x_1，…，x_n）

都恒大于或等于0，确定f是否都能写成有理函数的平方和？1927年阿廷已肯定地解决。

（18）用全等多面体构造空间。

德国数学家比贝尔巴赫（Bieberbach）1910年，莱因哈特（Reinhart）1928年作出部分解决。

（19）正则变分问题的解是否总是解析函数？

德国数学家伯恩斯坦（Bernrtein，1929）和苏联数学家彼德罗夫斯基（1939）已解决。

（20）研究一般边值问题。

此问题进展迅速，已成为一个很大的数学分支。目前还在继续发展。

（21）具有给定奇点和单值群的Fuchs类的线性微分方程解的存在性证明。

此问题属线性常微分方程的大范围理论。希尔伯特本人于1905年、勒尔（H·Röhrl）于1957年分别得出重要结果。1970年法国数学家德利涅（Déligne）作出了出色贡献。

（22）用自守函数将解析函数单值化。

此问题涉及艰深的黎曼面理论，1907年克伯（P·Koebe）对一个变量情形已解决而使问题的研究获重要突破。其它方面尚未解决。

（23）发展变分学方法的研究。

这不是一个明确的数学问题。20世纪变分法有了很大发展。

第四章

数学基础的哲学论战

19 世纪末到 20 世纪初，数学发展进入了一个激烈的变革时期。

在历史上，人们多次统一数学的企图均未成功。19世纪70年代，德国数学家康托尔创立无穷集合论，为统一数学的尝试提供了新的基础。在19世纪行将结束之际，数学分析基础注入严密性和精确化因集合论的应用而得以成功，数学概念的建立也因集合论的应用终于完善并且统一起来。整个数学呈现出空前的繁荣景象。在1900年第二届国际数学家会议上，当时数学界的领袖人物庞加莱心满意足地宣布："现在我们可以说，数学的完全严格性已经达到了。"庞加莱曾敏锐地觉察到物理学中的问题，指出物理学遇到了"危机"而必须对许多带根本性的问题重新加以思考，对促进19世纪末20世纪初的物理学革命产生过积极影响。但在数学领域情形却并非如他所言，事情的发展并非象庞加莱说的那样乐观。这位数学权威的话音刚落，就爆发了极为深刻的、震撼数学大厦的第三次数学危机，从而导致了一场由许多数学家卷入的关于数学基础的哲学论战。这场涉及数学根本的论战发自集合论的内在矛盾——人们发现在作为现代数学基础的集合论中有悖论，由此产生数学基础的第三次危机。论战自1900年到1930年，持续

三十年之久，把回答数学究竟是什么的研究推向一个新的阶段。

Ⅰ．悖论震撼了数学大厦

早在19世纪后期，就有人开始重新考虑数学的基础了。一种意见认为数学可建立在逻辑上，另外的意见则怀疑对逻辑的应用和依赖于逻辑证明的数学结果。这种争论在1900年以前已经冒了烟，只是尚未形成明显的学派之争。罗素悖论震撼了整个数学界，动摇了整个数学的基础。

1901年，英国数学家、哲学家罗素发现悖论，并将之写入1903年出版的《数学原理》序言中：一切不属于自身的集合所形成的集合是否属于自身？即设集合 $X \notin X$，且 $R=\{X \mid X \notin X\}$，问：$R \in R$还是$R \notin R$？如果$R \in R$，那么依R的定义就有$R \notin R$；如果$R \notin R$，· 那么R满足R的定义，因而R理应是集合 R 的一个元素即$R \in R$。这就是说所有不以自身为元素的集合组成的集合$R=\{X \mid X \notin X\}$，那么就一定导出$R \in R \Longleftrightarrow R \notin R$的矛盾。罗素1918年用“理发师悖论”对此作了通俗、形象的说明：一个理发师宣称自己当然不给自己刮脸的人刮脸，但却给所有自己不刮脸的人刮脸（即给而且只给自己不给自己刮脸的人刮脸)。一天理发师发生了疑问，他是否应给自己刮脸？要是他自己给自己刮脸，则按他声明的前一半，他就不该给自己刮脸；但如果他自己不给自己刮脸的话，则照他宣称的后一半，他又必须给自己刮脸。于是，理发师陷入逻辑矛盾之中。罗素悖论中所使用的论证方法极其简单明了，是集合论中最著名的悖论。由于德国数学家策梅罗在当时也独立地发现了这个悖论，故又名罗素－策梅罗悖论。

在罗素悖论之前，意大利数学家布拉利·弗蒂1897年3月28日在巴洛摩数学会上宣读了第一个近代悖论：所有序数的集合

$A=\{0, 1, 2, \cdots\}$，A也为良序集。设A的元素的序数都比A的序数ω小。而A是一切序数的集合，故序数ω也是A的元素，因此有$\omega<\omega$。这当然是明显的矛盾。最大序数悖论最先揭示出康托尔集合的矛盾，引起了数学界的兴趣。其实，康托尔在1895年就已经注意到了集合论的内在矛盾。他在1899年给代德金的信中指出，人们要想不陷入矛盾的话，就不能谈论由一切集合所构成的集合。这实质上就是罗素悖论的内容。康托尔1895年发现最大基数悖论，它基于集合论中子集基数的定义和康托尔定理：集合M的一切子集构成的幂集P，其基数关系为$\overline{\overline{P}}>\overline{\overline{M}}$。这表明无最大基数。但如果设$M$为"一切集合所组成的集合"，则对任意的$X\in P$，由$M$的定义有$X\in M$，所以$P\subseteq M$，从而$\overline{\overline{P}}\leqslant\overline{\overline{M}}$，这样，$M$的基数又应该是最大的。显然，问题就出在"一切集合所组成的集合"的含义上，这表现了各种逻辑悖论中的一种共同特征。康托尔试图用相容集合与不相容集合的办法，从否定方面来解决这个问题。

在罗素悖论之后，接着又出现了一系列悖论。例如，法国一位中学教师理查德1905年提出了关于定义可数性的"理查德悖论"；英国的图书馆管理员培里1906年提出关于英语有限音节与有限个英语表达式的"培里悖论"；1908年纳尔逊及其学生格雷林提出关于形容词所描述的性质与该词本身是否相符的"格雷林悖论"；法国数学家米里马诺夫1917年提出涉及所谓基础集合的"米里马诺夫悖论"等等。

如果说布拉利·弗蒂悖论和康托尔最大基数悖论仅涉及集合论中个别定义和定理的问题，因而还没有引起"危机感"的话，那么罗素悖论发现后所引起的反应就十分强烈了。人们很快发现罗素悖论不仅触及整个集合论的最根本的概念——集合，而且也触及逻辑推理本身的问题，从而引起数学家和逻辑学家的极大震惊。一连串悖论的出现，"不安全感"、"危机感"的忧患深深地扰乱了数学界。希尔伯特在《论无穷》中曾这样描述过："情况完全

与在无穷小计算的发展中发生过的相似。人们在为新的丰硕的果实感到高兴的时候，显然在推理方法的可靠性方面太不注意严格地加以对待了；因为在单纯应用那些逐渐变为一般的概念结构和推理方法的时候，就发现了矛盾，开始是个别的，后来越来越尖锐，越来越严重，这就是所谓集合论的悖论。尤其是由策梅罗和罗素发现的一个矛盾，直接在数学界产生灾难性的作用。”希尔伯特一点也没有夸张。数理逻辑的先驱、耶鲁的数学教授弗雷格接到罗素通告发现悖论的信后大为震惊，他在其正要付印的《算术基本定律》卷二的结尾中写道：“一个科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之时，它的基础倒塌了。当本书将要付印出版的时候，罗素先生的一封信就使我陷于这样的境地。”代德金也认为自己的实数理论有问题了，赶快把行将出版的划时代著作《连续性及无理数》（第三版）抽了回来。荷兰著名拓扑学家布劳威尔则宣布自己过去对数学的研究成果全都是“废话”，并声称要放弃他那著名的“不动点定理”。集合论及其创建者康托尔，再一次受到猛烈的攻击。“这个反抗运动来势之猛，使数学中最一般最有成效的概念和最简单最重要的推理方法受到了威胁，甚至要禁止它们的应用。”（希尔伯特：《论无穷》）这就迫使数学家对集合论的严格性以及数学中的概念构成法和数学论证方法进行逻辑上、哲学上的思考。于是，在本世纪初产生了一个新的数学领域——数学基础，它与数理逻辑一起开始其近代发展，至今这两个领域仍然紧密相联。

Ⅱ．数学基础的哲学流派

数学基础从产生的初期便分成相互对立的三大学派：最早出现以罗素为代表的逻辑主义，它强调逻辑而排斥直觉，主张逻辑

是整个数学的唯一基础；继之而起的是以布劳威尔为代表的直觉主义，它强调直觉而排斥逻辑，主张直觉才是数学的唯一基础；最后兴起的是以希尔伯特为代表的形式主义，它不象前两个学派那样极端尖锐而显得比较谦和，但仍然认为逻辑具有先验的真理性以及数学整个地具有逻辑的特征，它主张通过逻辑的相容性即无矛盾性来辩护数学的真理性和合法性。三派之间的热烈辩论成为现代数学史上著名的数学基础大论战。他们从各自的哲学观点出发，对悖论引起的数学危机，从概念的准确性、提法的严密性、推理的合法性等方面一一加以审查，对数学的本质、数学对象的存在性、数学的真理性以及与数学有关的逻辑问题等——一句话，对"数学是什么"这样一个问题进行哲学思考。而就这种哲学思考而言，三大派实际上是两大派：一派是逻辑主义和形式主义（可称之为"广义逻辑主义"），它们为了把经典数学从集合论悖论所造成的危机中解救出来而提供了不同方案，但目的则是一致的——论证经典数学的合理性；另一派是直觉主义，它认为产生悖论是经典数学的内在痼疾所致，因而必须彻底革经典数学的命，从根本上建立全新的（直觉主义的）数学。在争论过程中，尽管他们措辞尖刻而好象势不两立，但他们都吸收了对立面的一些看法而使各自的观点发生了很多变化。1930年，奥地利数理逻辑学家哥德尔不完备性定理的证明暴露了各派的弱点（数学家的思维被错误的哲学支配了，他们无视数学的历史发展，追求所谓"绝对严格"的、"一劳永逸"的数学逻辑基础，而缺乏"严格只能是相对的"辩证唯物主义观点），哲学的争论才冷淡下来。尽管争论的问题远未解决，三个派别都未能达到最初的目的，但以不同观点处理"元数学（即证明论）"问题，带来了他们未曾料到的有价值的结果。现今的数学家和数学哲学家，极少有人属于某一个固定的流派，他们不将兴趣表现于哲学立场，不再死死地苛求为数学提供一个绝对严格的基础。数学为什么必须是绝对严

格的呢？难免有漏洞、允许修正、具有暂时性和相对性并不断发展，这些同时为别的科学所具备的特征，不是更符合数学的实际面貌吗？他们宁愿采取辩证路线，取各派之长，遵循不越出知识边界这样一个方法论准则，继续寻求数学基础以及数理逻辑发展的规律。当今有直觉主义倾向的数学家大量地采用布劳威尔拒不采纳的形式化方法，而偏爱形式主义观点的数学家总是更倾心给出构造性的证明。愿意和平共处，不那么好斗，这是在几乎一切学术领域里都表现出来的现代精神，也是尊重历史的精神。

（1）逻辑主义

逻辑主义学派的论题是，数学可以还原为逻辑学，因此，数学只不过是逻辑学的一部分。他们认为，数学概念可以通过显定义而从逻辑概念推导出来，数学定理可以通过纯粹的逻辑演绎法而从逻辑公理推导出来。罗素说："逻辑学是数学的青年时代而数学是逻辑学的壮年时代。"按照罗素的主张，数学只不过是由命题p推出命题q的这种演绎的总和。他认为数学研究的对象是形式结构，数学只有形式而无内容，是对任意的东西、任意的性质都能成立的事项进行与内容无关的、形式的处理的学问。他甚至说："数学是这样一门学科，在其中我们永远不会知道我们所讲的是什么，也不会知道我们所说的是否为真。"罗素关于数学本性的见解，发表在他与美国数学家、哲学家A·N·怀特黑德合著的三卷巨作《数学原理》（1910年至1913年）上。罗素关于逻辑主义的论点，早在1903年就提出，他企图用符号逻辑的形式来重新构造数学。在此之前，代德金（《连续性及无理数》，1872年）、弗雷格（《算术基础》，1884年）以及皮亚诺、怀特黑德就发表过逻辑主义的主要论点并开始建立关于命题逻辑的内容或符号逻辑的方法，特别是弗雷格奠定了逻辑主义的纲领基础：从逻辑概念推出自然数。其它种类的数（正数、负数、分数、实数

和复数)的推导不是用通常增加自然数的定义域的方法来完成的，而是通过构造一种全新的定义域来实现。罗素以这些成果作为自己的研究基础，他注意到弗雷格的构造是不相容的，并发展出一种改进了的系统。罗素和怀特黑德在巨著《数学原理》中，通过显定义来产生一些具有实数的通常性质（根据这些定义）的逻辑构造。逻辑主义认为引进实数这种方法的关键在于，实数不是假定的，而是构造的。他们用类似的构造方法引进了分析学中的收敛、极限、连续性、微商、微分积分等概念，以及集合论中的超穷基数、序数等概念。罗素使用一套符号语言，从逻辑的基本法则出发，建立了自然数理论、实数理论和解析几何。这种“构造主义”的方法构成逻辑主义的本质部分。

其实，罗素在发现悖论之前就企图把数学归结为逻辑，由于悖论而使他的计划遇到困难未能实现。逻辑主义认为悖论起源于“非直谓”的定义，是由于对各种概念的“类型”忽视而致。逻辑学中最简单的自相矛盾是“不可谓的”这个概念。如果某个性质不属于自身，那么根据定义，它就是“不可谓的”。这样，“不可谓的”这个性质本身是否为不可谓的呢？若假定它是，那么既然它属于自身，根据“不可谓的”定义，它就不是不可谓的；假若它不是不可谓的，那么它就不属于自身，而根据“不可谓”的定义，它又是“不可谓的”。依据排中律，它只能在不可谓与不是不可谓之间作选择，而两种选择都会导致矛盾。这种矛盾正是罗素悖论。为了避免悖论，罗素等人规定集合自身不能作为其本身的元素，并引进分支类型论作为消除悖论的办法。在这个理论中，每一个类型的性质须再进一步细分为“阶”。这种分法并不是根据性质所属的个体种类，而是根据引入个体种类的定义形式。因此，类型论表现得极不自然，造成了很大的复杂性。同时，把数学中许多不可缺少的概念都排除了，许多基本定理不仅不可能得到证明，而且也不能得到表达。这种符号逻辑系统的类型论，使数学的构

造，特别是实数理论异常繁琐，以至直到第363页才用“类”把1定义出来。而第二卷又费了很大力气才推证出$m\times n=n\times m$。

为了克服数学定理的推导所造成的困难，罗素、怀特黑德引进了逻辑公理以外的一些特殊公理——无穷公理（它指出，对每一个自然数，存在一个更大的自然数。）和选择公理（它指出，对于不相交的非空集合所组成的每个集合，至少存在一个选择集合，即是说这个集合与每一个元素集合恰好具有一个共同元素），但这似乎又违背了从逻辑延伸出全部数学的最初承诺。对于分支类型论所造成的数学构造的巨大困难，罗素不得不使用暴力而引进所谓可化归公理，他借助于这个公理把某类型中的不同阶化归到该类型的最低阶，即所有命题都可以化归为等价的O型命题。引入这个公理的唯一理由是，或许再无其它办法可以摆脱分支类型论所造成的具体困难。这个公理很自然地成为人们评论《数学原理》这个系统的焦点。由于维特根斯坦的尖锐批评，罗素在1925年《数学原理》第二版中取消了可化归公理。

逻辑主义一开始就受到批判。人们认为以之作为数学的根本原理是没有根据的，如果把数学仅仅当作一套逻辑演绎系统就不能反映客观世界而缺乏创造力。直觉主义学派的支持者庞加莱讥讽说：“这是一个可钦可佩的定义，它献给那些从来不知道1的人。”他还挖苦道：“逻辑主义的理论倒不是不毛之地，什么也不长，它滋长矛盾！”从哲学意义上讲，确也很难在这个体系中补充直观和经验的概念，从而只能使数学成为“不结果实的”纯粹形式的演绎科学。直觉主义者、德国大数学家韦尔考察了《数学原理》一书的哲学背景之后评论说：“与其说数学是建立在逻辑之上的，还不如说是建立在逻辑学家创造的天堂之上的。”给逻辑主义以致命打击的是哥德尔的不完备性定理，它证明了从逻辑并不能推出算术的正确性来，因而宣告了把数学全部归结为逻辑的企图是不可能实现的（见Ⅱ(1)“哥德尔的两大发现”）。逻辑

主义的代表美国数理逻辑学家丘奇(A.Church) 1960年在逻辑、方法论和科学的哲学国际会议上所作的《数学与逻辑》的报告中公开地承认了这一点："后来当罗素违背了自己的出发点并采用了一个无穷公理之后，这似乎也使他自己不能不承认，这就可以说，他已超出了纯粹逻辑的范围。"后来逻辑主义的追随者很少。英国年轻的数学家拉塞姆（1930年逝世）、美国数学家奎因等人对逻辑主义作了进一步发展。拉塞姆是罗素的学生，1926年他沿着"既要避免非直谓定义的无意义性这种危险，又要令人满意地重新构造实数理论"这个方向作了一些尝试。他提出了允许接受非直谓定义的数学构造纲要，在简单类型论和保留一些必要的数学定义、特别是保留实数理论的那些定义方面取得了进展。纯粹的逻辑主义者，现在恐怕是找不到了。然而，罗素和怀特黑德的历史功绩也不可磨灭，他们为数理逻辑奠定了基础，他们所定型化的逻辑以及拉塞姆1926年所定型化的类型论，至今仍是数理逻辑的主要课题。而符号逻辑的公理化，揭示了数学与逻辑之间的关系，对于当今计算机的研制和人工智能的研究具有巨大的现实意义。

（2）直觉主义

直觉主义学派走向另一个极端。它的基本哲学立场是把数学看成人类心智固有的一种创造活动，是人脑一种自由的、生气勃勃的思维（精神）活动所带来的产物。它主张数学的对象及真理不能脱离数学的理性或直觉而独立存在，数学理论的真伪只能通过人的直觉来判断。直觉主义把数学创造活动区分为两个阶段：原始直觉和从原始直觉出发的构造。所有的人，包括原始人，也能在最起码的意义上从数学角度进行思考。在两个接连的不同时刻把注意力集中于两个不同的事物，这是人人都具备的（数学创造）能力，这就形成了"对偶"。从反复经验到具体对偶来一个

抽象，便只剩下空　的形式，就形成了所谓对偶性的原始直觉。能否从对偶性出发一步一步“能行”地构造出来，这是直觉主义判断数学对象存在性的唯一标准。它断然宣称：存在性就是可构造性。消除经典数学中的纯粹存在性是直觉主义的主要工作。

直觉主义基本哲学立场在逻辑观上的自然发挥，表现为逻辑虚无主义或逻辑取消主义，而最强烈的奇特性则是否认排中律。

直觉主义还认为，“无穷”概念是数学发展的生命力，但对它并没有充分地研究。由于在集合论中无限制地大量使用“无穷”概念，因而导致了悖论。实在无穷本身就是一个矛盾，是产生悖论更为深刻的根源。因此，在数学中驱除实无穷而保留潜无穷，对全部数学进行根本的改造，才能消除悖论。

整个直觉主义运动，就是从对经典数学的顽强的哲学批判开始的。“经典数学是形而上学”，这就是直觉主义讨伐经典数学檄文的第一言。这里的形而上学一词，指关于超越人的经验、人所无法企及的崇高事物的理论和学说。正因为如此，直觉主义付出了巨大的代价，在数学方面丢失了许多经典成果。希尔伯特说：“一个有价值的数学基础应能尽可能多地挽救成果。”以此作为标准来衡量，直觉主义当然是不如人意的，它的长处在哲学上。

在19世纪末，追求数学的严密性和追求实用构造这两种倾向，由于集合论的出现而尖锐对立，因而出现了极端的构造主义者。如象德国柏林学派的领袖人物克罗内克——这个直觉主义学派的先驱，不承认无穷集合，不承认连续函数，不承认无理数理论，甚至连圆周率 π 都认为不存在，因为从整数出发是无法构造出 π 来的。他主张任何东西都要有构造步骤或判断准则，由此他否定了通常的许多存在性定理，即使他本人在算术和代数上的工作也不符合他自己的主张。克罗内克在一次午餐上说的话，成了

他的名言："上帝创造了自然数，别的都是人造的。"他认为自然数是人们可以感觉的真实存在，其余的都是人为造出的一些符号和文字而已。克罗内克这种极端的哲学思想，并未得到他那个时代的人的支持。

20多年后，由于悖论的刺激，直觉主义思想又重新抬头。第二个强有力的倡导者是庞加莱。庞加莱是法国经验主义者，又称半直觉主义者。他因悖论的产生而反对集合论（直到1900年前才接受集合论），也反对逻辑主义学派企图从逻辑推出全部数学的计划。他虽然接受了数学"算术化"思想，但不同意把算术归约为集合论或归约为皮亚诺的自然数公理化定义。他认为自然数构成最基本的直觉对象，自然数1，2，3，4，…一个接一个而无限下去，是一个无穷展开的过程，是潜无穷的最好例证。他赞成这种"潜无穷"而拒绝实在无穷集合。所以，在他看来，自然数算术是全部数学最根本的概念，是一切数学方法和一切数学理论的源泉。他坚持所有的定义、证明和对象都必须是构造性的而不是纯粹地谈论所谓存在性。要进行实在无穷的构造是根本不可能的。他认为只要排除"一切集合的集合"这类不能直观理解的概念，悖论就会自然消除，因为悖论的来源是在于对集合的定义，其中就包含所要定义的那个集合。这是庞加莱与罗素的共同点。庞加莱并未系统地发展自己的思想，只限于对罗素、皮亚诺和希尔伯特学派的批评。此外，法国数学家波雷尔、拜尔、阿达玛、勒贝格在1905年一次著名的交换信件中，以及苏联数学家鲁津亦给出了类似的数学批判。不过，这些批评意见是零散的、片断的。

现代直觉主义系统理论的创立者是荷兰数学家布劳威尔，他在李群、几何、特别是拓扑学不动点理论等方面都有出色的成就。但是，他的数学哲学观点与其数学创造过程并不一致。1907年，布劳威尔发表博士论文《关于数学基础》初步拟定了直觉主

义纲领。1908年，他发表《论逻辑原理的不可靠》，对亚里士多德以来的传统逻辑的权威性提出挑战。以后数年间，他接连发表一系列论文，对经典数学的论证方式和已被公认的成果作了认真的批判。其中，1912年发表的一篇著名的论战性文章《直觉主义和形式主义》，对经典数学的基本精神进行了概括。当布劳威尔用"形式主义"这个名词来概括他所反对的数学思想时，希尔伯特的形式主义尚未形成。当希尔伯特提出他的证明论纲领而形成自己为代表的学派时，一个最恰当的命名早已由它的论敌预先给出。这一有趣的历史现象说明了：作为经典数学的批判者，布劳威尔的概括深中肯綮；而作为经典数学的维护者，形式主义的出现则势属必然。从1917年起，布劳威尔在严格的直觉主义观点指导下着手重新构造分析学，并获得成功。从而赢得了支持者，正式形成了直觉主义学派。布劳威尔比起早期的先驱者，无论在哲学上，还是在数学上，都更加彻底、完整地发展了直觉主义观点。他更狭义地解释直觉主义，把数学理解为一种智力的自然功能，一种自由构造的程序，只受到基本的数学直觉的限制，而与经验的世界无关，在这一点上他又不同于法国经验主义者。他坚持认为概念性思维不是数学本身的一个部分，概念只不过是理性对创造的性质加以隔离而产生的纯消极产物，概念性思维不能给数学带来任何有益的贡献，在直觉中是找不到概念思维的。显然，这种说法极端到了不符合直觉主义数学自身的创造过程的程度。他认为数学概念进入人们的头脑先于语言、逻辑和经验；决定概念的正确性和可接受性是直觉，而非经验和逻辑。因而数学的主要进展不是靠逻辑形式的完美化而得到，而是靠基本理论本身的变革，数学也就不必遵循什么逻辑规律。直觉主义学派最惊人的主张是反对把排中律运用于无穷集合，理由是有穷集合可以逐个检查，而无穷集合则办不到。布劳威尔首先分析了排中律的起源，认为它是从有限事物中概括出来的。任何一个论及某一有限

事物全体的命题，总是可以通过对每个事物逐一检验而判断命题的真伪，所以排中律成立。但要将它推广到无限事物上去，就不能不谨慎从事了。排中律在数学中大多涉及无穷问题，那么，对其推理的严格性怎能不怀疑呢？布劳威尔的直觉主义认为怀疑排中律的理由是，必须摒弃（未经观念证实的）超验存在是一种数学证明的工具的观点。而按照布劳威尔的观点，对于数学构造，当没有构造出来检验时，就不能说“存在”。命题“具有性质P的自然数存在（或者不存在）”只有当实际给出了具有性质P的自然数时，或者实际上证明了如果假设存在具有性质P的自然数则导致矛盾时，才可以认为它成立。当未能确定是哪一种情况时，产生了第三种情况——不可判定命题，即上述命题既不真又不假。因此，排中律未必成立，更不能作为一般的逻辑法则。布劳威尔否定排中律$P \vee \neg P$以及反证法$\neg\neg P \to P$，这是他与传统数学中的逻辑的主要差异点，其它差异均由此派生而出。1927年，希尔伯特在一次讲演中不无愤慨地说：“我很感惊异，一位数学家会怀疑排中律推理的严格适用性。我尤感惊异的是看来有整团体的数学家今天聚在一起这样做。使我最感惊异的是这样的事，即毕竟在数学家范围内个别一位情绪活跃富有才能的人的启示本领能够从事这种最难令人置信的、最乖戾的行为。”然而，正是这“最乖戾的行为”，包含着精彩的辩证法思想。哥德尔1931年证明的不完备性定理，使人们认识到了排中律绝对性的亏缺：排中律没有先验的绝对的正确性！

1912年，布劳威尔在荷兰阿姆斯特丹大学就职演说中，仍然坚持算术是从对时间的直觉导出的观点。他认为除了可数集合外，没有其它无穷集合，所以$\aleph_0$以上的超穷基数完全是不存在的，无穷集合只有一个基数即可数无穷$\aleph_0$。布劳威尔的直觉主义学派并不局限于批判，他们力图在构造的基础上建立一种新的数学。在1917年到20年代末的一系列文章中，布劳威尔坚持要求把

实际可构造性作为定义数学对象的唯一方法，而构造的原始材料由自然数组成。这些自然数仅仅被看作潜在的（不完全的）已知集合。他开始建立一个不依靠排中律的集合论，建立构造的测度论和函数论。他独创了扇定理、选择序列、散集等，试图使数学家相信若承认排中律就会导出矛盾。直觉主义学派除了构造分析学外，还重新构造了初等代数与初等几何。

德国数学家、物理学家和哲学家赫尔曼·韦尔是直觉主义的坚定拥护者。在现代数学史上，韦尔是继庞加莱、希尔伯特之后20世纪上半叶最伟大的数学家，是完成从经典数学(以实数为主)到现代数学（以结构为主）的转变的人物。他的研究涉及数学的许多领域，特别是在积分方程的解析理论、黎曼曲面理论、相对论和联络空间微分几何、群表示论及其在量子力学上的应用，以及把群论和微分几何学的思想推广到物理学方面，他都作出了很大贡献。他用积分方程的方法处理斯图姆一刘维尔型常微分方程，成为后来冯·诺伊曼创立厄米算子的高值理论和长勒曼积分算子理论的先声。他对黎曼面一般流形的内在刻划，不仅使黎曼面理论的研究从此突飞猛进，而且直接导致不依赖于函数、不依赖于嵌入的流形概念的发展，从而使一般拓扑学的奠基性经典著作《集合论》（豪斯多夫）得以诞生，拓扑学始成为现代数学的中心和主流。他还开创了解析数论的一个新分支——模1的一致分布理论，对以后的解析数论发展产生了举足轻重的影响。韦尔是统一场论的第一个倡导者；是规范场理论的真正先驱；他不仅对半单李群的线性表示进行了大范围研究，大大推动了群论的发展，而且第一个把群及其线性表示理论引入物理学，给现代物理学注入了新的观念。韦尔是希尔伯特的学生，而且被称为希尔伯特唯一的“数学儿子”——希尔伯特的数学思想几乎完全控制了韦尔的数学生涯。深受希尔伯特影响（不仅是数学，还有对科学价值的崇高信念以及对理性和科学的热爱）的韦尔，无时无

处不充满对导师的感激之情。

但是，在数学基础的争论中，韦尔公开地站到导师的对立面成为直觉主义的吹鼓手。他在1920年就发表措辞激烈的观点："人们错误地把逻辑看作是高于并且先于全部数学的某种东西，而终于没有根据地把它应用到无穷集合的数学上去了。这就是集合论的堕落和原罪，它正因此而受到自相矛盾的惩罚。"他谴责超穷归纳法及其在分析上的应用，以及康托尔集合论的大部分。他认为分析是建立在沙滩上的，指责"经典数学走过头了，它的言论离开以显然性为基础的真实意义和真理有多么远"。因此，主张直觉主义哲学，虽然消除了悖论，但是也因此而放弃经典分析的存在性定理，例如维尔斯特拉斯—波尔察诺定理，这就意味着否定了大部分经典数学。韦尔还试图用有限主义方法来完成证明论方案而一劳永逸地解决数学基础问题，这当然不可能成功，最后还得求助于无穷。希尔伯特开初曾对韦尔效忠直觉主义非常愤怒，但到后来也吸收了布劳威尔有穷性为最可靠的观点，希尔伯特的元数学从直觉主义的启示中获益非浅，它所贯彻的正是布劳威尔精神。从三十年代开始，由于哥德尔的完备性和不完备性定理的发现，许多数学家逐渐重视直觉主义。现在，大多数数学家认为构造性观点是正确的、重要的。当然，由直觉主义观点重新构造数学时，哪些部分可保留，哪些部分待修正，则是不易得出完美结论的问题。例如，荷兰数理逻辑学家A·海丁建立了包含古典逻辑系统的直觉逻辑系统；后来又有人建立起直觉主义集合论及直觉主义分析，都未能尽如人意。1967年，美国数学家毕肖普出版《构造性分析》，开始了构造主义时期。构造主义不象以前的直觉主义那样偏激，不去单纯地否定或争论；不是只考虑数学"应当"是什么，而不考虑数学实际上是什么；不是既论证直觉数学的合理性，又论证经典数学的不合理性，而是在论证直觉主义合理性的同时，既积极采用构造的方法逐一地解决具体问题，

又放心地使用布劳威尔拒不采纳的形式化方法。近十年来，构造主义有一定进展，《构造性泛函分析》等著作相继问世，但因其成就有限，尚未得到多数人的支持。不过，直觉主义逻辑仍将是数理逻辑研究中的一个重要课题，只是它已经输入了辩证的新时代精神而继续对数学进行哲学思考。

（3）形式主义

希尔伯特是反对直觉主义最有力的形式主义学派的领导人，而且是当之无愧的最伟大的现代数学家。“希尔伯特象是数学世界的亚历山大，在整个数学版图上，留下了他那巨大显赫的名字。正如《自然》杂志所指出的，那里有希尔伯特空间，希尔伯特不等式，希尔伯特变换，希尔伯特不变积分，希尔伯特不可约性定理，希尔伯特基定理，希尔伯特公理，希尔伯特子群，希尔伯特类域。”（Reid: Dauid Hilbert, Springer）希尔伯特以及以他为代表的哥廷根学派的巨大成就，培育了一代新数学，不仅为19世纪末20世纪初的数学发展开辟了道路，而且至今依然产生着强大而神奇的影响。

希尔伯特的数学研究可分为八个时期，每个时期的中心研究内容是：不变式理论（1885—1893年）；代数数论（1893—1898年）；几何学基础（1898—1902年）；狄里克雷原理及其相邻的变分演算和微分方程论（1900—1906年）；积分方程论（1900—1910年）；解析数论中华林问题的解法（1908—1909年）；数学物理学（1910—1922年）；数学的逻辑基础（1922—1939年）——使数学形式化并用确切的证明建立起它的相容性——这是希尔伯特一生中的最后一件重要工作，它在数学思想史上起了无法估量的重要作用。

希尔伯特从36岁（1898年）起到1943年逝世，整整花了40多年时间，将自己的精力贡献于数学基础之上。他曾支持康托尔的

无穷集合论而反对克罗内克，奋起保卫“无穷”和纯粹存在性的证明。1917年以后，为了回答直觉主义者对经典分析的挑战，他又继续1904年以前对数学基础问题的研究，发表了一系列重要文章，直接领导了形式主义学派在第三次数学危机中的激烈论战。这里，不妨列出一张希尔伯特关于数学基础和数理逻辑主要著作的清单：

1899年，《几何学基础》

1900年，《实数的公理化》，《数学问题》

1904年，《论逻辑及算术的基础》

1917年，《公理化思想》

1922年，《数学的逻辑基础》，《数学的新基础》Ⅰ

1925年，《论无穷》

1927年，《数学基础》

1928年，《数学基础问题（在意大利波洛那国际数学家大会上的讲演）》，《理论逻辑纲要》（与阿克曼合著）

1930年，《初等数论基础》，《逻辑及对自然的认识》

1931年，《排中律的证明》

1934年，《数学基础》Ⅰ（与贝纳斯合著）

1939年，《数学基础》Ⅱ（与贝纳斯合著）

在这些著作中，希尔伯特提出了大部分形式主义观点。形式主义主张逻辑和数学必须同时加以研究，两者的公理系统的基本概念都是没有意义的。数学思维的对象是符号本身，符号就是本质。公理也只是一行行符号，无所谓真假，只要能证明该公理系统是相容即不互相矛盾的，那么该公理系统便获得承认。因此，数学本身是一堆形式演绎系统的集合，每个形式系统都包含自己的逻辑、概念、公理、定理及其推导法则。数学的任务就是发展出每一个由公理系统所规定的形式演绎系统，在每一个系统中，通过一系列程序来证明定理，只要这种推演过程不产生矛盾，便

获得一种真理。无矛盾性就是数学的真理所在，而不在于能否构造出来。悖论就是不相容的一种表现。希尔伯特提出有穷观点的证明论（亦称元数学）计划，试图通过将数学理论形式公理化并证明这种形式系统的相容性来一方面避免悖论，另一方面又保住现有（经典）数学的全部成果。这个称为“希尔伯特纲领”的激动人心的计划能否实现呢？

所谓有穷观点，指经过有限次运算得出的事实无矛盾即为证明可靠。它要求对象是直观的；无穷集合不是一个已经完成的整体；所容许的方法是构造性方法来完成存在性证明。这实质上与直觉主义的基本观点相同。但形式主义和直觉主义根本否认实无穷（把无穷看作是实在的，是一个整体）因而否认排中律在数学中的运用不同，它承认实无穷在数学思维中的合法性（但实无穷或潜无穷在现实世界中都是不存在的），并把实无穷作为数学中的理想元素，从而肯定排中律是在数学中进行逻辑推理的基本规律。

元数学的研究对象是数学本身，即研究数学的最基本的活动——证明的合理性问题，它包括系统的相容性、完备性和判定问题等。希尔伯特主张不使用有争议的原则如象由矛盾去证明存在、超穷归纳、选择公理等，而要在元数学中用一种特殊的逻辑，使用一种普遍承认的具体而有限的推理。一个形式系统可以是无穷的，但存在性的证明只能是有限性和构造性的。希尔伯特引进元数学的目的，是企图把整个数学公理化（形式化），然后要求通过有限的构造步骤证明相容性，从而消除集合论的悖论，彻底解决数学基础问题。

按照希尔伯特的观点，康托尔集合论尽管存在悖论，但并不掩藏着内部矛盾；虽然他并不相信超穷集合和超穷基数的存在，但他认为康托尔的超穷基数理论是数学发现的绝妙工具；而悖论的根源并不在于康托尔理论的一些概念，而是在于把一些逻辑推

理方式错误地应用于这些概念。

为了实现自己的目的，希尔伯特首先用形式化公理方法把经典数学（算术、分析和集合论）陈述为一个形式系统；然后把经典数学所需的逻辑（指狭义谓词演算）用形式化公理方法陈述为一个形式系统；第三个步骤是证明这些形式系统的相容性。希尔伯特确信提出问题和解决问题是数学的本质，在数学中没有不可知的东西。他采取的用公理化方法限制概念而使"非直谓"的定义不能在公理系统内出现的作法，虽然成功地避免了一类悖论，却似乎是一种头痛医头、脚痛医脚的治标办法，谁能保证不会出现别种类型的悖论呢？庞加莱就忧虑地说："我们围住了一群羊，但是棚里或许已经有狼了。"希尔伯特学派，确实证明了附加若干限制的自然数算术形式系统的相容性，并确信他们就要实现证明算术和集合论的相容性这个目标了。但是，希尔伯特的形式主义纲领没有可能全部实现，哥德尔1931年继希尔伯特把数学理论形式化之后，进一步把元数学形式化，并且给出了"如果形式化的算术系统是相容的则它必是不完备的"——不完备性定理及其证明，宣告了希尔伯特纲领的破产，形式主义和逻辑主义的原则都必须修正。应当说，希尔伯特有穷主义纲领的产生是对数学基础危机的自然反应，就连坚信超穷数的康托尔也是赞同这个纲领的，认为这个纲领是建设性的，可能为分析的可靠性和正确性提供一种有用的、可以实现的保证。希尔伯特并不信服哥德尔冲毁了他的纲领，他（在1931年以前）坚信他的纲领会获得成功不是没有理由的，因为那时处于逻辑实证主义（实在命题是可证实或证伪的命题的思想是实证主义的信条）的高潮，希尔伯特纲领在智力上的吸引力还是颇为强大的，以至哥德尔在证明了不完备性定理和相容性不可证定理以后，他本人都觉得有必要保护这个纲领。这个纲领只是形式主义学派研究工作中的一个假说，哥德尔定理宣告它失败是不足为怪的，反映了从假说到科学原理建

立的辩证发展过程。而且，哥德尔定理宣告希尔伯特纲领失败并不表明这个纲领所建立的元数学也丧失其科学性，恰恰相反，哥德尔定理正是哥德尔创造性地运用元数学理论所取得的伟大成果，它使形式主义学派的元数学理论“纯化”了，更加完善了。

其实，元数学不仅对数学系统的相容性证明极为重要，而且它的方法实际上远在形式主义以前很久就已经在数学中使用了。例如，射影几何中的对偶原理就是关于射影几何的证明论定理（把射影几何的公理及证明作为考察对象所得到的定理），而不是射影几何的定理（由射影几何的公理推导所得到的定理）。希尔伯特的学生阿克曼、贝纳斯以及冯·诺伊曼在1920—1930年间都对元数学进行了研究。哥德尔的工作使元数学理论——形式主义的精髓中所包含的错误假说得以纠正，使元数学发展成为一门重要的科学。1936年，根茨推广了元数学中所使用的工具，用超穷归纳法证明了不加限制的形式算术的无矛盾性（见Ⅲ.(2)“根茨对纯数论的相容性证明”）。元数学所开辟的新路，即把整个理论、整个系统作为研究对象，是非常广阔的。这个领域内的工作大大改进了数学家们对数学推理本质的理解，把形式公理学向前推进了一大步，从而成为公理学发展史上最重要的转折点，标志着数学的发展从此进入研究形式系统的新阶段。现在，元数学已发展成为数理逻辑的四大分支（元数学、递归论、模型论和公理化集合论）之一。它提出的可判定性问题导致可计算性和一种算法概念的确立。由希尔伯特及其学派使之精确化的形式数学语言，奠定了构造算法语言的基础。

最后顺便指出，虽然希尔伯特纲领是富有成果的，同时又似乎是可信的，但现代形式主义者如美国数理逻辑学家罗宾逊和科恩（根据科恩关于连续统假设独立性的证明）复活的形式主义都是难以维持的，没有吸引力的。罗宾逊1964年在《形式主义64》一文中承认：“今天，我们不可能找到试图逃脱哥德尔第二不完

备性定理的结果（例如根茨的相容性证明或算术的任何别的相容性证明）的那种推理形式仍然是真正有穷的，因而是解释的。”科恩1967年也表示相信“希尔伯特纲领决不可能复活”。今天的形式主义也同样不可能为保卫古（经）典数学提供一种工具。相反，它提供了悲观的信息：没有任何基础可能用来绝对地证明数学的相容性。

Ⅲ．关于数学相容性及公理集合论

（1）哥德尔的两大发现

1928年，希尔伯特在意大利波伦亚召开的第八届国际数学家会议上提出四个问题：

第一，分析的相容性只要一些纯算术的初等引理即可证明；

第二，更高级数学的相容性，特别是选择公理的相容性；

第三，算术及分析形式系统的完全性；

第四，一阶谓词逻辑的完全性。一阶谓词即命题函数，该问题意指每个真的逻辑数学命题都可以由这个公理系统推出。

这四个问题，都很快被哥德尔原则上解决了。首先，哥德尔1929年在其博士学位论文《逻辑函数演算的公理的完全性》中，解决了一阶谓词演算的完全性问题，这成为他一生事业——研究数理逻辑的开端。罗素与怀特黑德的《数学原理》建立了逻辑演算的公理体系及推演规则之后，公理体系的相容性和完全性为数学家们所关注。所谓完全性系指每一真的逻辑数学命题都可以由此公理体系推出。1921年，美国数学家波斯特证明了命题演算的完全性。斯柯勒姆1922年隐含证明了“或者A是可证的，或者$\neg A$是可满足的”，但他可能因未意识到而没有将此结果陈述出来。而哥德尔的发现，得到了著名的“完备性定理”。

继后，哥德尔于1930年9月在东普鲁士康尼斯堡科学会会议上宣布了他的第二个重大发现——“不完备性定理”。他是从该年夏天研究希尔伯特提出的数学分析的相容性问题而开始证明不完备性定理的。他考虑用有限主义的算术证明算术的相容性，再用算术的相容性证明数学分析的相容性。哥德尔第一不完备性定理证明了：如果对自然数理论形式化而获得的系统是相容的，那末该系统必含一逻辑公式A，使得A和它的否定$\neg A$在系统中都不能证明。这个定理不仅表明作为自然数理论的公理而言通常的公理系统是不完备的，而且表明对自然数理论的形式化系统（在有穷观点下），在相容性范围内无论怎样添加公理，它仍然是不完备的。

哥德尔在获得上述结果时，使用了“算术化”的方法，从而得到第二重要结果，即哥德尔第二不完备性定理：如果在有穷观点下含自然数理论的形式化系统S是相容的，那末仅仅利用S中可形式化的论证来证明S的相容性的企图是不可能实现的。这就是说，要从有穷观点来证明自然数理论的形式化系统的相容性，就不能不用到一些有穷观点容许的但形式化自然数理论却不容许的某些论证。

哥德尔研究了46种函数和谓词，描述了一类所谓“递归的”数论函数（定义域和值域均为自然数集的函数）即后来由美国普林斯顿高级研究所数学家克林尼1936年命名的“原始递归函数”。他使用原始递归函数而成功地把元数学算术化这个有效方法引入数学基础中，根据它来把元数学中某些具体的有限过程作数论的表示。哥德尔证明他的前45个函数和谓词都是原始递归的，但第46个谓词为“X是一个可证公式的哥德尔数”（研究一个形式系统实际上是研究可数个对象的集合。给每一个对象配上一个数叫哥德尔数，通过它们反过来看形式系统的性质）。这就可在哥德尔配数系统中得到一个公式，相当于：我是不可证明的。一个系

统中存在真语句而又不可证，即为系统不完备。

哥德尔的不完备性定理否定了希尔伯特提出用形式主义纲领的证明论方法来证明算术公理相容性的计划，它的不可判定性结果证明了在数学中总有一个不可知。它使人们认识到，任何所谓严密的理论体系的数学基础都存在裂缝和漏洞！它有力地论证了马克思主义关于相对真理与绝对真理相互关系的理论，为该理论提供了一种典型而生动的例证。它表明形式系统在数学中决非万能，根本不可能穷尽全部数学真理，而只具有相对的真理性。它断然驳斥了数学中的绝对主义，粉碎了把形式系统视为数学中的"终极真理"的奢望。不完备性定理是数理逻辑、集合论和人工智能的基石，是数理逻辑发展的一个里程碑和转折点。它把希尔伯特、罗素所预定的方向扭转，将数理逻辑引入全新的道路。对20世纪的纯粹数学和应用数学作出极大贡献的一代数学巨匠冯·诺伊曼高度评价哥德尔"在现代逻辑中的成就是非凡的、不朽的——它的不朽甚至超过了纪念碑，它是一个里程碑，在可以望见的地方和可以望见的未来中永存的纪念碑"。

前不久，英国年轻数学家帕黎斯等人得出了一个惊人的发现：存在一个在皮亚诺公理系统中既不能证明也不能否证的纯粹组合问题。这对哥德尔不完备性定理给出了一个具体实例。而且，它还使人们产生了并非悲观的预感：要想解决至今尚未解决的许多数论难题，可能会是徒劳的。这为元数学研究不可判定命题开辟了新方向。

（2）根茨对纯数论的相容性证明

所谓纯数论，是指不使用解析中的辅助手段（如无理数和无穷级数）的自然数的理论，它与基于集合论的皮亚诺公理系统的自然数理论不同。迄今为止，对解决希尔伯特23个问题中第2个问题即"算术公理系统的相容性"所获得的最卓越成果，除了哥

德尔的不完备性定理，还有1936年首先发表的根茨的纯数论的相容性证明，它包括了迄今的相容性证明的最大范围。根茨是用超穷归纳法证明自然数算术形式系统的相容性的。1943年，他又对哥德尔不完备性定理的第二结果给出了直接证明。根茨在第二次世界大战将要结束时逝世，他的结果代表当时元数学的最高成就，并因其有限性和可构造性特点而成为机械化证明的理论基础。

1951年，斯库特证明了包括“无穷归纳”的数论系统的相容性，这是推广有穷观点即不必使用超穷归纳法而只使用有穷方法便可证明的典型例子。日本数学家竹内外史1955年证明了关于一阶谓词逻辑的根茨定理对某种特殊的类型论仍然成立，作为推论便得到了自然数理论的相容性。

对于分析学的相容性，虽然数学家们作了许多探索工作，但从形式主义观点看尚未获得十分满意的结果。斯培克托1962年取得了尝试性成果；日本年轻数学家高桥元男1967年用非构造的方法，证明单纯类型论中也可消去三段论法，由此可以得出数学分析子系统的相容性。但由于证明不是构造的，数学分析的相容性问题至今尚未彻底解决。

（3）公理集合论的产生

公理集合论是把康托尔创立的“朴素集合论”的内容公理化，从而对集合论进行数学基础论的考察。在此之前，罗素曾提出分歧类型论，并引进“任何公式都等价于一个直谓公式”的可化归公理。虽然类型论可消除悖论，但根据它想发展通常的实数理论也变得很困难。特别是可化归公理具有很大任意性等缺点，遭到许多人反对。

集合论公理化是由德国数学家策梅罗1908年首先提出而由弗兰克尔1922年完成的。策梅罗为了解决集合论悖论而在著名论文

《关于集合论基础的研究Ⅰ》中，把集合论变成一个完全抽象的公理化理论。他引进7条公理从而建立了有重大意义的集合论公理系统Z。弗兰克尔对Z作了许多改进，加进一个公理组即公理8——代换公理，并把公理以符号逻辑表示出来，冯·诺伊曼又引进公理9——基础公理，形成现代数学基础的ZF集合论公理系统。

1925年，冯·诺伊曼发表《集合论的一种公理化》，1928年又发表《集合论的公理化》。这两篇文章开辟了公理化集合论的第二个体系。冯·诺伊曼基本上保留了策梅罗的公理化理论，但采用了符号逻辑的方法消除了含混的概念并作了形式的推广。冯·诺伊曼的集合论公理体系利用函数概念而不用类的概念。贝耐斯于1937年、哥德尔于1940年进一步改进和简化了冯·诺伊曼的形式构造，经过整理而得到类的概念，从而创立NBG系统。ZF系统和NBG系统除了上述语言表述等差别外，ZF是通过限制集合产生的方式即把集合限制在对数学必不可少的那些集合上来避免悖论的；而NBG是通过承认有两种类（集合和固有类）的方法来排除悖论的。因为在ZF中可证的公式当且仅当在NBG中可证(充分性要求在NBG中的公式既无类变元又无类常数的条件)，故两个体系本质上是等价的，NBG可视为ZF的一个扩充。但因NBG有类变元和类常数，在表达集合论的概念时更方便些。

除了ZF和NBG集合论公理系统外，另外还有一些公理系统，因其用途远不如ZF和NBG而未受到人们重视。当然，集合论公理体系并非尽善尽美，仍然存在许多问题，特别是选择公理和连续统假设的相容性、独立性等问题，推动着人们从数学基础的观点出发，把关于无限的研究提高到一个新的阶段。

（4）选择公理和连续统假设的相容性、独立性

哥德尔在完成了他的两大贡献——完备性定理和不完备性定

理之后，说道："现在该轮到集合论了。"从1935年起，他就把目光瞄准希尔伯特23个问题中的第1个问题——康托尔的连续统基数（或势）问题，着手研究连续统假设（CH）及广义连续统假设(GCH)。

连续统假设是康托尔1878年创立集合论时在著名的《纯粹与应用数学》杂志第84卷上提出的假设：对于集合A的基数m、实数全体的基数（连续统基数）c、自然数全体的基数a、以区间[0，1]为定义域的实函数全体的基数f，有$f=2^c>c=2^a>a$成立。一般有$2^m>m$。与此有关的"对于任意的基数m，使$2^m>n>m$成立的基数n不存在"的假设称为广义连续统假设；特别当$m=a$时，称为连续统假设。它断言在$\aleph_0$和$\aleph_0$之间不存在基数，换言之，实数的无穷集合或者可列或者具有基数$\aleph$。

康托尔提出连续统假设62年间，其真伪一直成为悬案。波尔学派著名学者夕尔宾斯基于1934年在《连续统假设》专著中探讨了与此有深刻关联的诸假设，曾列举了12个与CH在逻辑上等价的数学问题及CH的82个推论；康托尔本人晚年也曾努力谋求解决；希尔伯特也花了许多精力证明它，并在1925～1926年宣布过证明的大纲，但皆未成功。1900年，希尔伯特讲演时将此问题作为23个问题中的第一个而高悬榜首，提供给20世纪的数学家去攻克。

选择公理是策梅罗1904年首先提出，并用它证明了良序定理。选择公理有很大用途，集合论中的许多重要结果例如两个基数是可比较的、关于集合的有限性和无限性的各种定义是等价的等等，都是应用了选择公理。而且，还用选择公理证明了：抽象代数中自由群论的尼尔森定理（自由群的子群也自由）；拓扑学中的吉洪诺夫定理（紧拓扑空间的直积拓扑空间是紧的）；泛函分析中的哈恩——巴拿赫扩张定理（赋范空间上的线性泛函的可扩张性）；布尔代数的斯通表示定理（每个布尔代数皆同构于集

代数）等许多重要定理。可是，这个应用极广、看来正确的选择公理，却可以导出一些无比荒唐的结果，例如1914年的豪斯多夫分球面定理和1923年的巴拿赫——塔尔斯基悖论：任一闭球体A，可分成两个不相交子集B和C之并，使A与B、C都能分别经过有限次分割而重合。这就是说，一个球可以分成两个与原来等体积的球，从而分裂n次就可得到2^n个与原来一样大小的球。这当然是十分矛盾的奇谈怪论！这就引起了许多数学家的疑虑。有些数学家如法国的著名学者阿达玛、勒贝格、波雷尔、拜尔等十分反对选择公理，提出了这个公理是否根本的，是否与其它公理相互独立等问题。反对者当然希望用ZF公理可以证明选择公理是错的，这样就可以把它排除出去。

可是，1940年哥德尔得到的结果就象1930年的发现使人开初感到惊异不解一样，这一次他又出人意料地证明：如果无选择公理的ZF是相容的，则把选择公理和广义连续统假设GCH加到ZF中而得到的系统也是相容的，即不能从ZF公理推出选择公理是错的；同样，ZF公理也不能推出连续统假设是错的。哥德尔采用集合论的内模型方法——他非常巧妙地构造了一个满足选择公理和GCH的ZF模型，又十分漂亮地引入一个在该模型中成立的所谓“可构造性公理”并将之加进ZF中，则选择公理和GCH便成为可证明的了。哥德尔的杰作挽救了选择公理和GCH几乎被搞得“乱七八糟”的声誉。到40至50年代，人们又普遍倾向于接受选择公理了。哥德尔关于GCH和选择公理相容性理论对数学发展的意义在于他第一次把可构成集引入集合论，而且证明了集合论的公理（含选择公理）和GCH在其中成立，因而触动了人类思维的深层结构。1951年3月，哥德尔因其非凡的数理逻辑成就而荣膺爱因斯坦勋章。这位奥地利数学家1939年底起侨居美国，一直在普林斯顿高级研究院工作到1978年去世。

关于选择公理和CH的独立性，人们早就作了种种努力，试

图证明选择公理是独立于集合论其它公理的。弗兰克尔1922年曾从可列个不是集合的个体出发，构造了一个不满足选择公理的集合论模型；20世纪最负盛名的逻辑学家之一、波兰学者莫斯托夫斯基1939年在ZF中构造了一个其个体不是集合的集合论模型，并证明了这个模型满足公理：每个集合可以是线性有序的，但不满足选择公理；门德尔森1956年利用无穷递降链$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \cdots$构造了一个不满足选择公理的模型。上述模型虽然满足了除选择公理之外的大多数公理，但它并不满足除选择公理之外的全部公理。因此，选择公理和CH的独立性，还不能算是很充分、很彻底的得到了证明。

1963年，问题取得了完全解决。29岁的美国青年数学家鲍尔·约瑟夫·科恩发明模型论中常用的一种影响极为重大的方法——力迫法，证明了ZF公理和CH彼此独立，即用ZF公理不可能证得CH的正确与否。由此，希尔伯特23个问题的第1个问题在下述意义上已获完全解决：不能判定其真假！换句话说，CH和现有的ZF集合论公理系统是独立的。

科恩的工作是哥德尔工作的继续，它们都堪作为人的认识能力无比深刻的典范例证，而科恩的工作难度更大，特别是在证明中所使用的力迫法是一种崭新的方法。这种方法已广泛应用于集合论，并已使一大批数学命题的独立性获证。到了80年代，关于这个方法已可以写出一本专著了。科恩在数学基础发展史上建立了一块里程碑，他因此而获得了很多荣誉：在1966年莫斯科国际数学家会议上，荣获菲尔兹奖，在迄今27位菲尔兹奖获奖者中，科恩是唯一的以数学基础方面的工作而获奖的数学家；1964年，他获得了美国数学会的波歇纪念奖；1967年，获美国国家科学奖章，并成为美国国家科学院院士。科恩1934年生于纽约，20岁得到硕士学位，24岁得到博士学位，30岁成为美国著名的斯坦福大学数学教授。他长于分析，对连续群有突出研究成果。但他勇敢

地打进数学基础这个陌生的、年轻一代的数学家不大涉足的领域，一炮打响并取得成功。美国现代著名逻辑学家丘奇在评价科恩时说：科恩提供了“数学史上一种多次出现的现象的又一例证：数学家在非本行的领域里作出了重要的工作。就是说，转向非本行专业并且解决了连这一专业中的专家都未能解决的问题。”

最后，还需指出：对集合论的公理基础作出重要贡献的还有法国布尔巴基学派。这个极端的形式主义学派从集合论观点出发，以巧妙的“结构主义”思想对数学进行了整理，使公理集合论普及到各数学领域并作为它们的基础。对布尔巴基学派的详细论述，见第十七章“历史留下的启示”Ⅲ。

（5）公理集合论的新进展

70年代以来，公理集合论又取得了一些进展。伊斯顿、西尔弗在基数性与共尾性研究上，索罗瓦伊在勒贝格可测性和拜尔性质研究上，取得了成果。1970年，马丁等人提出连续统假设的推论——马丁公理——（MA）。此公理与ZFC公理相容且独立。并且若ZFC相容，则ZFC+MA+¬CH也相容。马丁公理在数学上有一系列重要应用。舍拉1974年得到一个特别重要的结果：证明了群论中的怀特黑德猜想在ZFC下是不可判定的，如果假定$V=L$，则每个怀特黑德群是自由群；如果假定MA+¬CH，则存在非自由的怀特黑德群。

关于可测基数和实值可测基数方面已获许多结果。索罗瓦伊1971年证明了ZFC和MC的相容性等于ZFC和RMC的相容性。马丁和索罗瓦伊1970年证明ZFC、RMC和MA不相容；还证明了由ZFC、MC、MA和$2^{\omega}>\omega_2$可推出实数的每个Σ^1_3集合是勒贝格可测的且具有拜尔性质。西尔弗1971年由ZFC和MC的相容性推得ZFC和MC以及定理“实数的勒贝格不可测Δ^1_3集合是存在的”的

相容性。

苏斯林假设（SH）是集合论中悬而未决近50年的一大难题。这个假设是：每个稠密的、线性的有序完备集合，如果无端点且至多含有w个不相交区间，则它和实数连续统是序同的。吉赫和顿伦波姆证明：由ZF的相容性可推出ZFC、$\neg$SH和GCH的相容性以及ZFC、$\neg$SH和$2^w > w_1$的相容性。索罗瓦伊和顿伦波姆1971年由ZFC、MA和$2^w > w_1$推出SH。京森1972年在证明由ZF的相容性可推出ZFC、SH和$2^w = w_1$的相容性以及由$V = L$可推出$\neg$SH的基础上，1976年利用$V = L$彻底解决了苏斯林假说。

在自然数列的集合能否用某种方法决定的问题上，发展出一些决定性公理。例如，在经过许多人努力的基础上，马丁1975年证明波雷尔集是可决定的，并猜想所有解析集是可决定的。由于此猜想不可能在集合论中获得证明，因而它成为一个新公理。

哥德尔曾发表过一种设想：将来是否会产生一个新公理，由它得出否定连续统假设的证明？至今所讨论的公理，都是一些扩张集合论传统疆界的。企图证实这种设想的塔斯基不可达基数公理，尚未达到充足的力量。但是，表明不可达基数领域大基数存在性的大基数方法（连续统及广义连续统假设反映了最理想的大基数产生的方法），对数学具有不容忽视的重要性。例如，拓扑学中一个40多年历史的著名的正规莫尔空间猜想归结为可测基数的存在问题而得到答案。这在现有的ZFC中是无法得到解决的。

现代公理集合论发展了一大堆公理，有时简直叫人难辨其真假！现在，我们似乎可以标出两套集合论：有选择公理的和无选择公理的。然而，无论怎样，数学基础的裂缝和漏洞仍然开着：承认选择公理将导致“分球怪论”，而若采用无选择公理的集合论又会招惹更多麻烦——自1963年以来，在无选择公理的集合论模型中，平均每年会产生一个“怪论”，例如连续函数变得不连续，不可测集变成了可测集，一个空间会有两个维数，现行的许

多定理都被推翻……经过十多年的研究与比较，数学家们多数倾向于还是使用选择公理。目前，许多数学家尚在继续致力于建立比ZF公理更优美、更完整、更自明的集合论模 型，以便证明出选择公理与连续统假设的真伪——这是数学基础留给数学家不得安宁的思维之谜。数学发展的历史足迹，正是数学家们在重重迷雾中艰难行进、一步一步地踏出来的。

第 五 章

现代数学发展概观之一：数论

Ⅰ. 综　述

数论是研究数的规律，特别是研究整数性质的一门纯粹数学。经历了漫长的历史阶段，已发展有初等数论、解析数论、代数数论、超越数论和几何数论等分支。现代数论的统一理论开端于1801年高斯24岁时的不朽著作《算术探讨》，它确定了至今有关这一课题的研究方向。数论中许多问题和结果的提法一般都非常简单，但定理的证明却往往十分困难，常常需要广泛而深奥的数学工具。现今的数论广泛地使用抽象代数(主要在代数数论中)和深刻的分析方法（在解析数论中），由此导出的一些问题和分支与整数只有间接的联系。

整数之间一些简单而奇妙的关系，早在2500年前古希腊的毕达哥拉斯学派时期就成了研究对象。在古希腊数学中就出现了属于现代数论的“有无限多个素数存在”的证明、求素数的厄拉托斯提尼筛法等，《几何原本》中就已经知道了求最大公约数的欧几里得算法、素数以及任何正整数可以唯一分解成素数因子的乘积。经过长期实践，人们总结出数的一些规律。到17世纪，关于

整数的研究在欧洲重新兴起，其中被称为数论创始人的法国数学家费尔马提出了许多猜想。18世纪，欧拉和拉格朗日使数论取得长足进展。欧拉的著作“Algebra”(《代数学》)第二卷汇集了二次不定方程的丰富多采的内容；拉格朗日发展了连分数理论，并将它应用于不定方程。18世纪末，勒让德出版巨著《essai sur la théorie des nombres》，试图集数论成果之大成。“数论”这个名称就是从这本书的书名而来的。

初等数论是关于有理整数的整除性、不定方程、同余式等的初等理论。代数数论起源于高斯关于4次剩余的研究。“代数数”(即满足有理整系数方程的复数根)是代数数论的基本概念。代数数论产生于研究证明费尔马大定理的过程中。创立现代代数数论的工作是高斯的学生代德金1871年完成的。该理论是高斯的复整数和库莫尔的代数数的一般化。代德金还引进“理想”的理论，提供了代数数域的概念和性质，而克罗内克创立了另一种域论——有理性域。代数数论的研究以1897年希尔伯特论代数数的著名报告为顶峰，他重新整理了所有这些早期的理论，并给出了获得这些结果的新颖方法，从而大大扩展了代数数论。1983年，美国数学家扎吉尔、格罗斯解决了代数数论中一个长期悬而未决的问题——类数问题，根据哥德费尔德的认识写成长达300页的论文，证明了：两个似乎毫无关系的数学对象——一条椭圆曲线与一系列（无穷多个）数系之间竟然有着密切的联系，而且这种联系确实是异乎寻常的。

解析数论是用数学分析方法解决数论问题。解析数论这一新分支开端于德国数学家狄里克雷应用解析法计算二次型的类数及1837年引进所谓“狄里克雷L函数”($L(S,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(n)}{n^s}$)对“勒让德猜想”〔在首项和公差互素的等差级数即没有公因子的等差级数$a+b\cdot n$（这里a、b为两个固定的互素的正整数，$n=1,2,3,\cdots$）

中存在有无穷多个素数]的证明。毕生致力于高斯《算术探讨》简化工作的狄里克雷1863年又发表著作《数论讲义》，汇同黎曼1859年试图证明素数定理的工作，从而建立了解析数论。之后，俄国数学家切贝晓夫和英国数学家哈代、利特尔伍德、印裔英籍数学家拉马努扬等为代表的英国解析数论学派将之发展。解析数论最有力的方法是1937年苏联数学家维诺格拉多夫创造的“三角和方法”——它在函数论和概率论中也起着重要作用。中国数学家华罗庚创造性地发展了这个方法。华罗庚在数论上的贡献是十分卓越的，他还和中国数学家王元一起创立了在应用上和理论上都堪称光辉范例的“华——王法”，即用数论方法构造出高维立方体中的一致分布点集，然后用这个点集上的被积函数的黎曼积分和来近似地表示多重积分的值，并使得函数满足某种条件时，其误差与维数无关。1983年5月《美国数学会通报》发表文章高度评价了华罗庚与王元的著作《数论在近似分析中的应用》“是对数值积分、微分方程与积分方程求解法的一个最有价值的贡献”。

在解析数论方面，借助罗斯和贝克分别对丢番图逼近和超越数的工作（见超越数论和几何数论）而导致了一些经典问题的解决，但是解析数论的原始方向，如哥德巴赫猜想、孪生素数问题、黎曼假设等仍然进展不大，要想获得大的突破或决定性的解决有待于新方法的创造甚至新理论的引入。这由代数几何学中魏依猜想的证明而导致三角和估计的改进以及一些解析数论猜想的解决可以清楚地看出来。

超越数论是研究超越数的理论，1844年由法国数学家刘维尔开创，形成于19世纪末。何为超越数？简言之，一个实数若非代数方程的根就叫超越数。反之，称为代数数。古希腊三大作图难题之一“化圆为方”问题，就是因π的超越性而不可用尺规完成。解决一个数是否超越数这类问题的难度很大，一直到1873年才由法国数学家埃尔米特证明了自然对数e是超越数。1882年，德国数

学家林德曼使用同样方法得到圆周率π的超越性的著名古典结果，e、π的超越性获证是19世纪中超越数论的代表成就。希尔伯特曾对他的第7问题的解决持悲观态度，认为黎曼猜想的解决要比这个问题容易，但却出乎意料，苏联数学家盖尔封特1934年就取得了突破：发现了杰出的“盖尔封特定理”，即如果a是除0或1的任意代数数，且b是任意无理代数数，则所有具有a^b形式的数皆为超越数。1935年德国的施奈德也独立地解决了这个问题。1966年，27岁的英国数学家阿兰·贝克走出了一条新路，将盖尔封特一施奈德定理拓广到更一般的情形。他得出了一系列关于代数数对数的线性型的定理，典型的例如：a_1，a_2，…，$a_n(n\geqslant1)$是非零代数数，$\log a_1$，$\log a_2$，…，$\log a_n$在有理数域上线性独立，令β_0，…，β_n是不全为零的满足一些条件的数，则对任意$K>n+1$，有

$|\beta_0+\beta_1\log a_1+\beta_2\log a_2+\cdots+\beta_n\log a_n|>Ce^{-(\log H)^K}$，其中$C$是可以有效计算的。

定理的证明是异常困难的，而应用也十分广泛。应用这一套定理和方法，贝克在数论各分支里取得了辉煌成果，例如：

（1）超越数论方面，证明了如果a_1，a_2，…，a_n是非0或1的代数数，β_0，β_1，…，β_n是线性独立的代数无理数，则$e^{\beta_0}a_1^{\beta_1}\cdots a_n^{\beta_n}$是超越数。这就使得盖尔封特的结果成为简单的特例。

（2）二次数域方面，肯定了类数为1的虚二次数域只有9个，从而解决了高斯时代留下的一个老问题。

（3）不定方程方面，得到了$y^2=x^3+k$ $(k\neq0)$整数解的上界的著名结果，特别是对于二元方程，贝克肯定地解决了希尔伯特第10问题。

希尔伯特第10问题是指能否用一种有限步构成的一般算法判断一个不定方程（丢番图方程）的可解性？美国数学家戴维斯(Davis)、普特南(Putnam)、罗宾逊（Robinson)等在1950年前后取得了关键性突破。1970年苏联数学家马蒂塞维奇（Matijas-

evič)利用他们的工作结果最终证明：能用于一切不定方程的判定方法是不存在的。这个轰动一时的结果无疑是正确的，但就某些方程还是有一般性结果。1909年瑟厄、1945年德国数学家西格尔、1955年英籍德国数学家罗斯所给出的一系列定理都可以证明一些不定方程的解数有限。但是这些定理都存在一个致命的弱点，就是无法有效计算。贝克却突破了这一点，他进一步证明了二元方程$f(x,y)=m$的有限组解(x,y)都满足$max(|x|,|y|)<Ce^{(\log m)^K}$，其中$K>f(x,y)$的次数。而最重要的是$C$可有效计算。

贝克在仅仅十年多一点的时间里，解决了数论中十几个历时已久的困难问题，范围涉及超越数论、代数数论和不定方程。他所著的128页的《超越数论》，被认为能与高斯的开创了数论新纪元的《算术探讨》相媲美，人们评价他“在数论中引起了自高斯以来最深刻的变化”。1970年，贝克荣获第7届菲尔兹奖，1975年获亚当斯奖。

近年来，超越数论取得了重大进展，对超越数的构成、分类、代数独立性的研究都成效显著，一系列经典问题得以解决，例如对古典猜想$a^b-b^a=1$只有唯一的一组解$3^2-2^3=1$，直到1977年才由于超越数论的进展而得到证明。当然，对超越数论的研究还远未完成，同时还有一些问题仍待解决，如e、π的代数独立性，欧拉常数γ的超越性等等。

几何数论研究的对象是“空间格网”，创始人是杰出的德国数学家闵可夫斯基和沃格诺伊。为了简化狄里克雷和埃尔米特所建立的丢番图逼近的解析理论，闵可夫斯基将格和凸集等几何概念引进数论，得到了对有界凸体K的体积$V(K)$，比值$\Delta(K)/V(K)$的下界的“闵可夫斯基定理”并提出了关于上界的猜想。此猜想1943年为诺卡所证明从而成为闵可夫斯基——诺卡定理。闵可夫斯基在叙述他的猜想时称：“证明这个定理需要用所

有的线性变换所构成的群的算术理论。”西格尔从此观点出发，考虑与线性变换群的关系，于1945年给出了另一证明从而得到“西格尔中值定理”。由它很容易推出诺卡的结果。1946年，法国数学家魏依将之推广到一般情形。50年代以后，几何数论取得了各种新的结果。例如，丢番图逼近（闵可夫斯基原意指当变量取有理整数值或某个代数数域的整数值时，所给函数的绝对值满足的上、下界不等式。现在丢番图逼近已成为研究自变量取整数值时函数值的界限或分布状态的一个数学分支名称。）中最典型的问题——用有理数逼近无理数的问题，罗斯在前人研究的基础上于1955年将有名的瑟厄—西格尔定理推广成瑟厄—西格尔—罗斯定理。设θ为无理数，x是自然数，y为整数，μ为实数，且使得$\left|\theta-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{x^{\mu}}$具有无限多对有理整数解$x$，$y$，记$\mu$的上界为$\mu(\theta)$。问：$\mu(\theta)$是什么？

这是一个重大的问题，对θ为n次代数数的情形，数学家们研究了足足一个世纪，进展却很缓慢。1844年，刘维尔证明了$\mu(\theta)\leqslant n$；1908年，瑟厄（A.Thue）证明了$\mu(\theta)\leqslant\frac{n}{2}+1$；1921年西格尔证明了$\mu(\theta)\leqslant 2\sqrt{n}$。从而得到瑟厄—西格尔定理。自此以后，该问题一直沉寂了三十多年而无实质性进展。1955年，罗斯发表一篇20页的论文《对于代数数的有理逼近》，证明了$\mu(\theta)=2$。换言之，罗斯证明了当$K>2$时，$\left|\theta-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{x^{K}}$的有理整数解只有有限对。罗斯解决问题的工作是“至善”而彻底的。而且，此定理有许多用途，如前所述可以证明不定方程解数有限，还可改进华林问题的结论。罗斯定理使古老的丢番图逼近这一数论分支有了新的活力。克劳斯·费里德里希·罗斯是英籍德国人，这个移民的后代在他成为英国公民后的第十年，成了第一个荣获非

尔兹奖的英国数学家。

1962年S.朗（S.Lang）将上述结果推广到有限次代数数域及单变量代数函数域的情形。1970年施米特（W.M.Schmidt）又将罗斯定理推广到联立逼近的情形，这是很多数学家所作的推广中最重要的推广。此外，前面多次提到的西德数学家西格尔，他不仅在数论中的华林问题、群论、代数学二次型方面有杰出成就，而且在多复变函数论、微分几何、代数几何、微分方程中微分流形定性理论、力学中的三体问题等众多领域都有杰出成就。

1978年他与苏联著名泛函分析学家盖尔芳德同膺首届国际沃尔夫奖。

Ⅱ. 数论中的六颗明珠

数学家们把著名的数论问题誉为数学皇冠上的明珠，把解决这些难题和猜想，甚至哪怕是解决其中一部分问题，都视为至高无上的荣誉。这是因为摘取“明珠”，远比问题本身具有更重要的意义。这些问题好比一些支点，通过运用强大的数学杠杆（工具），而移动了数学大山。即是说，它往往需要奠定一门学科的基石之后，才能使问题获得解决，因而成为数学发展水平的标志之一。例如数论中联系质数与有限算术方程的“魏依猜想”这个世界著名问题的解决，推动了整个代数几何学的扩张和更新。而对此做出不朽贡献的数学家格罗申第克和德利涅，都荣获当今世界最高数学奖——菲尔兹奖。这就是数论这门古老的学科，却显示着年轻旺盛的生命力，吸引了无数第一流的数学家为之付出巨大精力、甚至奋斗终生的原因。这里，仅选取其中六颗明珠，它们在数论的发展中起了或正在起着巨大的作用。

（1）素数定理

对于相当大的整数N，小于N的素数的个数（记为$\pi(N)$，这是一个著名的数论函数）当$N\to\infty$时大约为$\frac{N}{\log N}$，即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\pi(N)\log N}{N}=1\text{或}\pi(N)\sim\frac{N}{\log N}(N\to\infty)\text{。}$$

这就是素数定理，它揭示了素数的分布状况。用简单的筛法可知$\pi(10)=4$，也就是不超过10的素数有四个即 2,3，5，7；$\pi(100)=25$，$\pi(1000)=168$，…素数定理是解析数论的中心问题，是高斯和勒让德根据大量的具体数字材料于1800年共同提出的猜想，它曾作为19世纪最著名的猜想而震惊数学界。对于该定理的证明，五十年间毫无进展。1850年，俄国数学家切贝晓夫首开纪录，得到部分结果。1859年，年方三十出头的德国科学院新院士黎曼发表《论小于给定数的素数个数》，文章极其简略，证明脱漏很大。但它对以后的素数论研究产生了很大影响。其后三十年间，不少数学家力图证明黎曼论文中所表达的主要结果，但都徒劳无功。1896年法国数学家阿达玛和比利时数学家达拉瓦勒·布桑几乎同时独立地运用高深的解析工具即复变函数方法证明了素数定理。前者用复变量的整函数理论，后者用黎曼ζ函数。以后，维纳又给出了一个复杂的新证明。德国数论专家兰朵1908年不用整函数理论得到的结果是：$\pi(N)=\text{lin}+(Ne^{-c\sqrt{\log N}})$。将近一百年的努力，使许多人怀疑这个定理最终是否会有初等证明出现。英国解析数论学派的领袖人物哈代1921年在哥本哈根数学会发表讲演时就曾断言用初等方法证明素数定理是不可能的，他说："如果谁给出了素数定理的初等证明，那他就证明了（我们现在关于数论、解析函数论中何谓深刻、何谓肤浅的）见解是错误的……，从而到了该丢掉一些著作并重写理论的时候了。"

这件事的转机终于发生在二十八年之后。1948年，31岁的美

籍挪威数学家阿特尔·塞尔贝格和另一位同样年轻的匈牙利数学家P·厄尔德斯同时首次成功地不用函数论方法，给出了一个初等方法的证明。这是当时数学上的一件大事。也许是“困难守恒”吧，上述各种证明都繁复难懂。他们两人的证明都依靠了一个不等式——现在习称为塞尔贝格不等式，它的意义超过了初等证明。在20世纪的数学史特别是数论史上，留下了许多以塞尔贝格命名的数学名词：塞尔贝格不等式、塞尔贝格等式、塞尔贝格渐近公式、塞尔贝格猜想、塞尔贝格ζ函数、塞尔贝格筛法等等。塞尔贝格还于1942年得到了关于证明黎曼猜想的开拓性成果。1950年，在美国坎布里奇举行的战后第一次国际数学家大会上，塞尔贝格荣获第二届菲尔兹奖。之后，他的研究工作涉及数学的许多分支：1952年对布朗筛法作出了重大改进，克服了原来的上下界过于宽泛的缺点；1956年发表《弱对称黎曼空间中的调和分析和不连续群及其对于狄里克雷级数的应用》，开拓了一个新的研究方向；自60年代起，他的研究主题转向连续群的离散子群。在菲尔兹奖的早期获奖者中，塞尔贝格是长期活跃于数学界的一位骨干数学家。

（2）黎曼假设

黎曼在1859年证明素数定理的论文《论小于给定数的素数个数》中提出了著名的ζ函数：$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$，其中复数$s=a+bi$。黎曼假设断定$\zeta(s)$的零点除明显的外，都位于复平面中$a=\frac{1}{2}$这条直线上。

黎曼假设是黎曼论文中提出的好几个猜想中最著名的猜想，它一直是解析数论的核心问题，被视为可怕而又非常值得摘取的数论明珠。在希尔伯特23个问题中，这个猜想是第8问题的核心。

然而从1859年算起，近一百三十年了，这个问题仍然是一个未彻底解决的超级难题。

英国数学家利特尔伍德1914年、梯赫玛歇1936年分别得到有限的解位于$a=\frac{1}{2}$这条直线上。1942年，塞尔贝格发表长达59页的博士论文《论黎曼ζ函数的零点》，用迂回分阶段方法证明黎曼假设的等价命题：$N_0(B)\geqslant AN(B)$。这里$N_0(B)$是线段$\{0<b<B,a=\frac{1}{2}\}$上$\zeta(S)$的零点个数，$N(B)$是矩形$\{0<b<B,0\leqslant a<1\}$中$\zeta(S)$的零点个数。塞尔贝格证明了：存在常数A，使得$N_0(B)\geqslant AB\log B$。这大体相当于：$N_0(B)\geqslant A\cdot N(B)$。虽然，所得出的$A$值非常小，离黎曼假设所要求的$A=1$还相当远，但塞尔贝格在开辟证明黎曼假设新途径中跨出了重要的第一步，因而载入了史册。

勒默尔1959年、布伦特1979年应用电子计算机，使黎曼假设在更大范围内得到肯定，但对超出计算范围以外的无穷多个解来说，却未得到任何确定的证明结果。1974年，从事常微分方程研究的美国麻省理工学院的莱文森用另外的方法成功地证明了至少有$\frac{1}{3}$的零点在直线$a=\frac{1}{2}$上。虽然这离彻底解决黎曼假设还相当遥远，却已经是一项不朽的成就。

顺便指出，在许多数论问题中，如果黎曼假设成立，都将得到极好的结果。可是，在它远未得到证实之前，有没有可以帮助我们绕过黎曼假设而得到同样好的结果的武器呢？当然有，那就是"朋比利中值公式"。1965年，25岁的意大利数学家恩里科·朋比利在数论大师达文泡特主持的英国数学杂志《数学》上发表论文《论大筛法》，对由苏联数学家林尼克首创的、以后又经瑞尼和罗斯作过大的改进的"大筛法"作出了重大改进。大筛法是进

攻哥德巴赫猜想、孪生数猜想的有效武器，而利用朋比利公式可以很容易地证明哥德巴赫猜想中的（1+3）。若记数列a，$a+q$，$a+2q$，$a+3q$，…中不大于x的素数个数为$\pi(x;q,a)$，则人们早就猜测当a，q互素时，$\pi(x;q,a)$和$\pi(x)/\varphi(q)$应相差一个高阶无穷小，这里的$\varphi(q)$是不大于q且与q互素的自然数个数。对于较大的q，这个差的情况怎样？人们知之甚少。朋比利证明了有重大意义的公式：对任意的$A>0$，总有$B>0$，使

$$\sum_{q\leqslant x_0(\ln x)B}\max_{\substack{a\\(a,q)=1}}\left|\pi(x;q,a)-\frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\right|=o\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right)。$$

朋比利曾于1962年在学生时代就给出了素数定理的新的初等证明：$\pi(N)-\frac{N}{\log N}=o\left(\frac{N}{(\log N)^A}\right)$。塞尔贝格的证明无疑十分精巧，但对无穷小阶的估计不如早先函数论方法所证得的精密。朋比利的新证明缩短了这种差距。朋比利的研究宽广而深入，他能够迅速掌握一个复杂的新领域的精髓，从中挑出可以研究的重大问题，并自如地运用其它极不相同领域的工具去解决之。除在数论上的贡献外，他对单叶函数论的比贝尔巴赫猜想和极小曲面问题以及给出有限单群分类问题中一类李型单群的唯一性证明（1980年）都做出了令人注目的成果。在1974年温哥华召开的国际数学家大会上，朋比利荣获第 8 届菲尔兹奖；1976年，又获意大利科学院价值五百万里拉的菲尔特里纳里奖；1978年当选为国际数学家联盟的五名执行委员之一。

（3）费尔马小定理

若p为质数，数a不能被p整除，则差$a^{p-1}-1$能被p整除（例如：$2^{7-1}-1$能被7整除，$5^{3-1}-1$能被3整除）。

这就是所谓费尔马小定理。1801年，高斯用数论的主要思想之一"同余理论"对这个定理给出了证明。但后来仍被许多人继

续研究。近年来，数学家得到用费尔马小定理鉴定素数的最新方法：设n是一个需鉴定的大整数，用n去除2^n-2，若不能整除则n为合数；若能整除，n就很可能是素数。现在鉴定一个上百位的数是否为素数，仅需15秒钟。这个新发现解决了长期以来数学家们十分感兴趣而又十分头疼的问题。

（4）费尔马大定理与莫德尔猜想

费尔马1637年在古希腊数学家丢番图的《算术学》法译本的空白处作了一些笔记，指出当整数$n>2$时，方程$x^n+y^n=z^n$无整数解。这就是著名的费尔马大定理或称费尔马猜想。对毕达哥拉斯方程$x^2+y^2=z^2$的整数解问题，早在公元三世纪由中国古代数学家刘徽和古希腊的丢番图分别解决了。但对从丢番图命题出发的费尔马猜想经历了三个半世纪多，至今尚未彻底解决。1678年莱布尼兹证明$n=4$成立；1770年欧拉证明$n=3$成立；1823年71岁高龄的勒让德、1825年20岁的狄里克雷分别证明$n=5$成立；1839年法国的拉梅证明$n=7$的情况。拉梅1847年把不定方程$x^p+y^p=z^p$（p为奇素数）的整数解分成两种情况：当xyz不能被p整除时，为费尔马大定理的第一种情况；当xyz能被p整除时，为费尔马大定理的第二种情况。自19世纪中叶以来，证明了对奇素数p，当$2p+1$、$4p+1$中有一个是素数，或者当$8p+1$、$10p+1$、$14p+1$和$16p+1$中有一个为奇素数时，费尔马大定理第一种情况成立。1848年，德国数论专家库莫尔研究了一套分圆整数的数系，发现了一素数使费尔马大定理成立的充分条件——如果素数p满足库莫尔条件，即为正则素数，那么$x^p+y^p=z^p$不可能成立。库莫尔的发现，使问题推进到对$n<100$的所有奇素数以及大于100的所有的正则素数定理成立。这是一个巨大贡献。更重要的是，库莫尔在证明费尔马大定理中，创立了远比定理本身价值更大的理想数理论，它使得整个数论的结构发生了深刻变化，为代德金的现

代代数数论及理想论作了奠基。从此，数论由研究正整数发展为研究一般的整数。这是在费尔马大定理探索过程中，最有价值的副产品之一。

1850年和1853年法国巴黎科学院曾两次悬赏3000法朗征求对这一历史名题的证明。1907年，德国哥廷根皇家科学院以空前的大悬赏10万马克、限期一百年征求解答，但至今未获解决。数学家们只证明了当n不大于某个正整数时，方程无整数解，而对其一般性证明至今未给出，却又举不出反例。1921年，英国数学家莫德尔提出猜想："设$F(x、y)$为两变数x、y的有理系数多项式，那么当曲线$F(x, y)=0$的亏格大于1时，方程$F(x, y)=0$至多只有有限组有理解。"由此可推出费尔马曲线$x^n+y^n=1(n\geqslant 4)$上只有有限多有理点，再推出最多只可能有有限多个n，方程$x^n+y^n=z^n$有整数解。莫德尔猜想提出后的61年间，许多卓越的数学家都曾试图对它作出某种程度的证明，但都未能取得最后突破。尽管有1941年D·H·雷梅和E·雷梅证明了$p\leqslant 253, 747, 887$时费尔马大定理成立，以及1978年美国《科学杂志》发表了瓦格斯塔夫借助电子计算机证明$2<$素数$p<125,000$时费尔马大定理正确的新成果而获得大进展，但对费尔马问题研究作出重大突破的是1983年格德·法尔廷斯博士的杰出工作。这位29岁的联邦德国乌珀塔尔大学青年数学家，成功地运用了苏联数学家沙伐拉维奇在代数几何上的一系列结果，使用了参模理论、半阿贝尔簇理论、阿贝尔簇的高度理论以及其他深奥复杂的理论而彻底证明了莫德尔猜想。这项成果被公认为近年来最重要的数学研究成果之一，法尔廷斯荣获1986年第十一届菲尔兹奖。

（5）华林问题

1770年，英国数学家华林在他的《代数沉思录》中提出一个著名的猜想：对于任意整数$K\geqslant 2$，皆存在一个仅依赖于K的整

数$S(K)$，使每一整数皆可表为S个非负整数的K次幂之和。通俗地叙述就是：任一正整数皆可用不超过4个平方数之和或9个立方数之和或19个4次方数之和等等来表示。

华林猜想的正确性，1907年由希尔伯特最先证明，他一举证明了对于每一个幂次K，$S(K)$都存在且有限。但对于具体的各个幂次K，$S(K)$是多少，他未能给出。因此，希尔伯特是在有限范围内解决了华林问题。本世纪20年代，英国数学家哈代和利特尔伍德开创与发展了堆垒数论中一个强有力的新的分析方法——圆法，得到华林问题精密得多的结果。记$G(K)$为最小的整数S，使每一充分大的整数N皆可表为方程：$N=x_1^K+\cdots+x_S^K$，其中$x_i(i=1,\cdots,S)$为非负整数。哈代与利特尔伍德证明了$G(K)\leqslant(K-2)2^{K-1}+5$；而当$S\geqslant(K-2)2^{K-1}+5$时，得到了$N=\sum_{i=1}^{S}x_i^K$的解数的渐近公式。苏联数学家维诺格拉多夫自1924年起专攻华林问题，到1934年他创造了使$G(K)$估值急速下降的新方法，得到：当$K>9$时，$G(K)<6K(\ln K+1)$进而得到$G(3)\leqslant13,G(4)\leqslant21,G(5)\leqslant31,G(6)\leqslant15,G(7)\leqslant63,G(8)\leqslant81$。1959年，他又把公式改进为$G(K)<K(2\ln K+4\ln\ln K+2\ln\ln\ln K+13)$。和希尔伯特的证明一样，后几位数学家的证明也是解析的，形式上很繁，但较之希尔伯特的逻辑方法明显，思路简单，因而显得更优越。两个证明方法都成了新的数论定理的强大源泉。华林问题的完全初等的证明，到1942年才被初出茅庐的年轻苏联数学家林尼克找到——就其初等性而言是十分美妙的，但无疑是很复杂的。华林问题中的劣弧问题，德国数学家西格尔1922年有出色的结果，更深刻的研究是由日本数学家三井孝美1960年完成的。华林问题中的优弧问题则是华罗庚1957年利用指数和的结果圆满处理的，他将哈代、利特尔伍德证明当$S\geqslant2K+1$时有一个渐近公式成立这一结果改进为$S\geqslant K+1$。这一结果是最佳可

能的。华罗庚早在1938年就对华林问题作出了著名贡献。他证明$G(K)\leqslant 2^K+1$或$S\geqslant 2^K+1$时方程$N=\sum_{i=1}^{S}x_i^K$解数的渐近公式成立。这项工作的重要之点在于他证明了著名的“华氏不等式”$\int_0^1\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\alpha x^K}\right|^{2^K}d\alpha\ll p^{2^K-K+\varepsilon}$。值得注意的是对于小的$K$及渐近公式，条件$S\geqslant 2^K+1$至今仍无改进。本世纪30年代，许多数学家研究了华林问题中的x^K推广到K次多项式的问题，主要困难是华罗庚用他以精美方法得到的关于指数和的估计$|S(p^K,x^K)|=p^{K(1-1/K)}$克服的。华罗庚在1937与1940年间证明了：对$K$次整值多项式$f(x_i)$，方程$N=\sum_{i=1}^{S}f(x_i)$的解数当$S\geqslant 2^K+1(1\leqslant K\leqslant 10)$时有一个渐近公式.对于$S\geqslant 2K^2(2\ln K+\ln\ln K+2.5)(K>10)$亦有渐近公式。对方程$N=\sum_{i=1}^{S}f_i(x_i)$,($f_i(x_i)$为$K$次整值多项式)，上述结果仍成立。华罗庚还证明了：以$G(f)$表示最小的S使$N=\sum_{i=1}^{S}f(x_i)$对充分大N成立，$\partial^\circ f$表示f的次数，有$G(f|\partial^\circ f)=K\leqslant(K-1)2^{k+1}$及$G(f\mid\partial^\circ f=3)\leqslant 8$及$\max_{f(x)}G(f)\geqslant 2^k-1(K\geqslant 5)$。华罗庚系统地研究了所谓华林——哥德巴赫问题，即当变数$x_i(1\leqslant i\leqslant S)$限制为素数时，方程$N=\sum_{i=1}^{S}x_i^K$及其推广了的可解性问题。他的研究成果包含在其众所周知的论著《堆垒素数论》中。例如他证明了当$S\geqslant 2^k+1(K\leqslant 10)$及$S\geqslant 2K^2(2\ln K+\ln\ln K+2.5)(K>10)$时，方程$N=\sum_{i=1}^{S}p_i^K$的解数有一个渐近公式。他得到许多类似于上述的，以素数为变数的结果。华罗庚得出的著名的“华氏定理”,绩冠当时欧洲同行。

（6）哥德巴赫猜想

1742年，任彼得堡科学院院士的德国数学家哥德巴赫在给欧拉的信中提出一个猜想：每一个大于2的偶数都可表示为两个素数之和。欧拉复信中表示确信这个猜想的正确性，但他不能证明。1770年华林在提出“华林问题”时，将哥德巴赫猜想也同时发表，并附加上“每个奇数是素数或是三个素数之和。现在，哥德巴赫猜想的提法是：(A) 每个偶数≥6为两个奇素数之和；(B) 每个奇数≥9可表为三个奇素数的和。显然，(B) 为 (A) 的推论。

哥德巴赫猜想的突破性进展始于本世纪20年代，这是由于解析数论的发展为研究这个问题提供了新的方法。1920年挪威数学家布朗用“布朗筛法”证明：每个大偶数均为两个素因子个数不超过9的数之和，简记为命题 (9+9)。布朗的工作成了研究哥德巴赫问题的转折点。1937年，苏联数学家维诺格拉多夫用他发明的“三角和方法”解决了数论中一系列困难问题，特别是首先证明了充分大的奇数都可表示为三个素数之和。这就基本上解决了哥德巴赫猜想的命题 (B)。1941年苏联的林尼克发明“大筛法”证明了“每一个充分大的数可以用两个素数和2的数次幂来表示”。匈牙利数学家雷尼利用林尼克方法证明 $(1+C)$ 即偶数可表示为一个素数和另一个数之和，该数为不超过 C 个素数之积。这条道路大大接近了原来的哥德巴赫猜想。自50年代以来，这种方式的证明不断取得进展。其中多数重要新成果以及哥德巴赫猜想证明的领先地位都属于中国数学家。

中国有悠久的数论历史，著名的“剩余定理”(西方称“孙子定理”)即为中国首创。南宋秦九韶解联立同余式的方法早于欧拉、高斯500多年；元代朱世杰解多元高次方程组的方法比法国著名数学家别朱早400多年。

中国现代数学的形成人华罗庚，是中国解析数论的前驱。他不仅对华林问题作出了重要贡献，还于1938年运用维诺格拉多夫方法，独立地证明了对于几乎所有偶数（A）成立。特别，他还证明了更广的结果：几乎所有偶数都可以表为一个素数及一个素数的K次幂之和（$K \geqslant 1$的整数）。华罗庚所著价值极大的名著《堆垒素数论》(1953)、《数论导引》(1957) 受到全世界的推崇。1957年，王元在筛法应用和研究上得到代表性结果：一个充分大偶数都是一个不超过2个素因子之积与一个不超过3个素因子之积的殆素数之和，记为（2+3）。1962年，潘承洞与巴尔巴恩各自独立证明了（1+5）。1963年，潘、巴与王元又都证明了(1+4)，王元证明了（1+3），达世界先进水平。1965年，陈景润"移动了数学的群山"取得了创世界纪录的伟大成就。他运用筛法突破了（1+2）的重大难关，获得目前哥德巴赫猜想研究的最佳成果。1973年，陈景润发表（1+2）简化证明，命$P_x(1,2)$表示将x表为素数与两个素数之积的和的表示法，他把定理推进到$p_x(1,2) \geqslant \frac{0.81xc}{(\ln x)^2}$，从而轰动了全世界。"陈氏定理"被公认为"筛法的光辉顶点"。1980至1981年，陈景润、潘承洞在向哥德巴赫猜想终点（1+1）的最后追进中，一起研究了哥德巴赫猜想的例外集合的上界估计，得到了一些重要结果。潘承洞证明了一个新的素数分布的均值定理，该定理包括了著名的蓬皮里均值定理，具有多方面的重要应用，将之用于哥德巴赫猜想方面则能给"陈景润定理"以实质性的简化。陈景润还得到区间殆素数分布的一些结果和"孪生素数猜想"的最佳结果。孪生素数即公差为2的一对奇数都是素数，如17、19或29、31或41、43等。古人猜想这种孪生素数有无穷多对。陈景润证明了：有无穷多对相邻的公差为2的奇数p和$p+2$，其中p为素数，$p+2$至多有两个素因子。尽管此结果尚未达最终目的，但陈氏定理是受到国际上赞扬的重大成

就。陈景润的证明引用了素数论中几乎所有的结果，要想看懂它，先要掌握600页的方程和论证！陈景润的杰出成果获全国自然科学一等奖（1981年）。

另外，闵嗣鹤在经典解析数论的整点问题、除数问题、素数分布问题、数论函数和的估计上的研究方面；柯召在丢番图不定方程（给出了方程$X^xY^y=Z^z$无限多组$X>1$，$Y>1$的偶数解；对于100多年历史的卡塔兰猜想即除开$8=2^3$和$9=3^2$外，没有两个连续数都是正整数的方幂有重要贡献）和定出行列式为1的整系数n元正定二次型的类数C_n，以及在解析数论、组合论、数论的应用方面；屠规章对国际上一个关于组合数论的猜想及全优搜索问题的研究方面；张春暄自1973年以来，把过去分离的数论和多体问题联系起来把多体结构和费尔马稳定群结合起来，得到简洁而深刻，应用广泛而有效的一种多体稳定性新理论，等等，都分别获得了非常重要的成果。我国已形成数论研究的“中国学派”，正对世界现代数论的发展产生重要的影响。

第六章

现代数学发展概观之二：微分方程论

I. 偏微分方程

偏微分方程发端于达朗贝尔和欧拉对流体力学的物理问题的处理，而最初研究一般理论的是拉格朗日和拉普拉斯。二阶线性方程自18世纪以来就成为研究的主流。直到19世纪，椭圆型、抛物型和双曲型三种类型的分类以及边值问题、初值问题都是主要研究对象。

法国大数学家傅里叶迈出了19世纪偏微分方程研究极为重要的第一大步。1822年，他发表经典文献《热的解析理论》，发明了著名的解热传导方程的变量分离法和傅里叶级数解法。傅里叶（1811）、柯西（《波的传播理论》，1816）、普阿松（《关于波的理论的报告》，1816）共同得出了用封闭形式解偏微分方程的最重要的方法——“傅里叶积分法”。在位势方程方面，主要结果是英国数学家格林1828年在《关于数学分析应用于电磁学理论的一篇论文》中得到的“格林定理”，该定理应用于许多类型的微分方程，而且格林所建立的许多主要概念，其意义远远超越于位势方程之外。黎曼于1855～1859年创立了解波动方程初值问题的一

个全新方法。麦克斯韦1864年得到导出电磁学规律的基本方程的最终形式，从而使他预言光是电磁现象。关于存在性定理，柯西(1842年的一系列论文)、施瓦兹（1870)、柯瓦列夫斯卡娅(1875)、诺依曼（《关于阿贝尔积分的黎曼理论的讲义》，1884)、庞加莱（1894)、阿达玛（《关于波的传播的讲义》，1903)、希尔伯特（1899，1901）等著名学者都分别以不同方法取得重要结果。但初值与边值问题的系统理论还不成熟，这个领域的工作在20世纪得以迅速进展。

20世纪以来，偏微分方程的古典理论即对古典物理方程如波动方程、热传导方程和位势方程的研究以及分离变量法和傅里叶级数等，逐步趋于完备。柯朗和希尔伯特的《数学物理方法》是偏微分方程的经典著作。1936年苏联数学家索伯列夫研究偏微分方程解的存在性问题，首先引进广义函数概念为广义函数论奠基。自1945年法国数学家L·施瓦兹创建广义函数论，使之成为分析的新工具后，偏微分方程的一般理论稳步成长并发展迅速。

线性偏微分方程是伴随线性泛函分析特别是广义函数论等工具的发展兴起于50年代的一个领域。它广泛地运用泛函分析和先验估计技术，后者对非线性理论的发展亦至关重要。60年代中期至70年代，先是拟微分算子后是傅里叶积分算子和微局部分析的使用，极大地刺激了线性问题研究的发展。微局部分析是日本和美国60年代最先引入的研究线性偏微分方程的新方法，法国在70年代作了重要发展。它系统地应用代数几何学、纤维丛理论和同调代数的方法和工具；反过来，微局部化的理论结果又被应用于代数几何或解析几何问题（单值性和Gauss—Manin联络；黎曼一希尔伯特问题；对偶)。微局部化对线性偏微分方程理论中奇异性传播、偏微分方程解的渐近展开、散射理论和算子谱理论等等的研究都起了显著的推进作用。

奇异积分的领域有了重要进展：推广了Hölder理论的经典结果，特别是在1981年完全证明了Calderon的一个著名猜想：借助一个Lipschitz连续函数定义的一类一般的非拟微分奇异积分算子的L^2连续性。核观点的拟微分算子已经通过把问题化为边界问题而出现在某些椭圆边值问题的数据处理中。

非正则问题，尤其是正则性差的开集中的或奇导系数的边值问题的研究，使谱理论、数值分析的应用和解的奇导性描述得到持续发展。

常系数线性偏微分方程解的存在性问题，是世界数学的一大难题，过去一直只限于几种特殊情况。50年代初，才有了系统结果，埃伦普瑞斯和马格兰奇首次证明了每个常系数线性偏微分方程是可解的。但对于变系数，问题就要复杂困难得多。1957年，美籍德国数学家勒维举出的反例使人们大吃一惊：有一个具体的算子P使一般偏微分方程$Pu=v$根本无解。瑞典数学家拉尔斯·霍曼德尔1959年的发现更是出人预料：这种没有解的方程比有解的方程要多得多！而且他得到了存在性、唯一性和正则性的重要定理，从而得到了判断变系数线性偏微分方程何时有解的标准。这是线性偏微分方程理论的第一流系统成果，这项出色工作使霍曼德尔成为1962年第五届菲尔兹奖得主。勒维和霍曼德尔的工作被当代著名数学家哈尔莫斯（Halmos）等人在1976年列为美国(实际上不限于美国）四十年来数学方面的十大成就之一。勒维于1956、1957、1960年发表的三篇论文都是偏微分方程理论的奠基性文章。他除了给出反例证明了存在$P(x,D)$，使一般偏微分方程$P(x,D)u(x)=v(x)$无广义函数解外，还把希尔伯特第19问题（即若F关于变元解析，则椭圆型偏微分方程$F=0$的任意解在其存在域内也解析）中的变元推广到复域，从而简化了问题的证明。勒维荣获美国1979年斯蒂尔奖，并荣获当代最高数学奖——1984年第七届国际沃尔夫奖。霍曼德尔是当代最著名的偏微分

方程理论专家，在1955年的博士论文《偏微分算子的一般理论》中，他系统地总结了常系数线性偏微分算子理论，得到了一般偏微分方程解是无穷可微的一个简单条件——次椭圆性条件。这个重要结果，比1945年有人给出的解是解析的充要条件要困难得多。霍曼德尔继续向更复杂、更一般的偏微分方程理论冲击，1965年独立地得到伪微分算子并发现它构成一个算子代数。从此，伪微分算子理论及应用成为近十多年来偏微分方程理论的一个热门领域。1970年，霍曼德尔将伪微分算子推广到更大的一类算子——傅里叶积分算子。这些理论构成了偏微分方程的现代内容。

非线性偏微分方程理论在过去三十年中，伴随粘性流体与可压缩流体的研究而兴起（例如60年代末查布斯基和克鲁斯卡尔将1895年Kortweg和de Vries推导的非线性波动方程“K－dV方程”进行数值分析，从而创立了孤粒子理论）。上述流体力学中出现的非线性问题同超声速流体的研究相联系的椭圆型、抛物型、双曲型三个类型混杂于一起的混合型偏微分方程的研究，对高阶方程和方程组的研究等等，使问题更加复杂化。

线性方法促进了非线性偏微分方程的研究，特别是微局部化和仿微分算子的使用导致了非线性方程中奇导性的最好描述，也加深了对双曲情形奇导性的传播和交互作用的理解。这说明线性和非线性两种偏微分方程的研究呈现出越来越大的相互渗透趋势。

计算技术的发展对非线性问题带来了重大影响：一是使用计算机使得偏微分方程的数值处理成为可能。二是数值分析对非线性偏微分方程（如Navier-Stokes型方程）数值法规的编制和方法的系统研究产生了巨大影响。三是使有关非线性偏微分方程的数学猜测（数值解及解的性质）有了检验手段，例如利用计算机发现了Korteweg-de Vries方程的解渐近地分解为孤立波的和；探索Euler方程的奇异性；反映扩散方程中孤立波的传播；描述酶反

应方程中的逐次分支和奇异吸引子的出现……等等。

研究非线性方程而获菲尔兹奖的，最先是美国数学家杰西·道格拉斯，他是1936年首届菲尔兹奖得主，主要工作是解决了比利时物理学家普拉托极小曲面问题。普拉托对各种封闭曲线形状的金属圈上的肥皂泡作了大量研究，提出了何种情况下所张成的曲面有极小曲面问题。拉格朗日早在1760年就用变分法证明极小曲面应该满足一个二阶非线性偏微分方程。普拉托问题提出后，黎曼、维尔斯特拉斯等历代大数学家都曾试图解决而皆受挫。道格拉斯是在其博士导师卡斯耐主持的微分几何研讨班上首次接触到普拉托问题的。他在1920年取得博士学位后，得到了阿达玛以及德国数学家库朗、荷格洛兹的帮助和鼓励，取得了一系列重要成果。1931年，道格拉斯发表了关于普拉托问题的完全解。之后，又把极小曲面的工作进行了推广。为此，他获得了美国数学会1943年授与的波歇奖。极小曲面理论后来成为数学家非常感兴趣的领域，自60年代以来硕果累累。道格拉斯关于普拉托问题的解中是否有奇点呢？这个遗留问题，美国数学家奥斯曼给出了否定的证明。另一方面，道格拉斯的工作对象是三维曲面，自然可以考虑向高维空间作抽象的推广。德吉奥基等人已证明当$n=1,2,3,4,5,6$时，$n+1$维欧氏空间中的一类n维极小曲面没有内奇点。而朋比利却发现$n=7$时可以有一个奇点。这种从7开始的质变真是出乎人们所料。朋比利和德吉奥基一起还证明了8维以上极小超曲面不一定是平面。而伯恩斯坦曾猜想：大范围定义域R^n的R^{n+1}中的曲面，如果是极小曲面则必是超平面。道吉奥基等人在60年代初期就证明了$n\leqslant7$时伯恩斯坦猜想是对的。朋比利的结果，对于理解某一类偏微分方程解空间的几何性态，无疑是很重要的。这也是朋比利荣获1974年菲尔兹奖的主要工作之一。

华裔美籍数学家、第十届菲尔兹奖获得者邱成桐，运用熟练的先验估计等技术，证明了一个归结为高度非线性偏微分方程的

存在性问题的"卡那比猜想"（见现代数学发展概观之五：微分几何学），促使一大批同类的方程得到解决。他还应用大范围微分几何方法，从极小曲面出发，运用非线性方程技巧解决了广义相对论中的"正质量猜想"，多复变函数论及代数几何学中的高维闵可夫斯基问题解的正则性，塞梵利猜想、史密斯猜想以及给出弗兰克尔猜想一个新证明等许多重要问题。在邱成桐之前，人们解的非线性偏微分方程多是接近线性的，而对高度非线性方程缺少办法。邱成桐却左右逢源、成果累累，充分显示了他所采用的一套解高难度非线性偏微分方程的方法对解决复解析几何学、代数几何学、微分几何学乃至广义相对论问题具有强大无比、势如破竹的威力。

非线性偏微分方程自七十年代以来有重大进展，主要为美国柯朗研究所的林尼伯格等一批数学家所推进，他们巧妙地用临界点理论，获得一系列非线性微分方程的解的存在性。

最一般的椭圆方程$L(u)=f(x)$早已有波兰数学家肖德尔等人作了研究。解的解析性即希尔伯特第19问题，已由苏联数学家伯恩斯坦1929年证明，彼德罗夫斯基1939年将此结果推广到一般非线性椭圆型方程组。初值问题解的唯一性，卡尔内曼1939年进行了研究，普利斯1954年、日本学者溝畑茂及白田平等1959年作了发展。日本学者南云道夫1954年对二阶椭圆型拟线性偏微分方程的狄里克雷问题，给出了一般解的存在定理。哈尔与热多等人研究了椭圆型偏微分方程与变微分法的关系。在高阶椭圆型方程及方程组研究方面，嘎丁（1953）、弗里德里克斯（1953）、S·阿格基（1959）、多格里斯（1959）、L·利雷克尔格（1959）及布洛德等人都取得了重要结果。由卡尔内曼建立的解的唯一开拓定理经过50年代莫勃尔等人的工作以及60年代初阿皮斯的推广，有了重要进展。1964年，苏联数学家巴比尔、格鲁金和毕西克等对一般拟线性方程和线性的、拟线性的椭圆方程组的研究以及1963～

1970年对椭圆型伪微算子和指标的研究都取得了重要结果。对于后者，英国数学家阿蒂雅和美国数学家辛格尔合作在1963年使用K理论等许多重要工具证明了轰动整个数学界的“阿蒂雅--辛格尔指标定理”，把代数几何学的黎曼一罗赫定理推广到一般流形，复变函数微分被一般微分算子D取代，则成立$\dim(Ker\Delta)-\dim(Co\ Ker\Delta)=1-\zeta$（$\zeta$为亏格）。在这里，分析学和拓扑学被联结起来，结果极其深刻而又十分和谐，它显示了数学的统一性，十分引人注目。“指标定理”是在证明盖尔芳德的一个猜想时得到的。苏联著名数学家盖尔芳德1960年注意到闭微分流形上的椭圆型算子有一个分析指标，而流形本身是有拓扑指标的，这两个看来毫不相关的指标有没有什么关系呢？盖尔芳德大胆猜想它们应该相等。阿蒂雅和辛格尔证明了这个猜想是正确的。不久，阿蒂雅和鲍特合作又把这个定理推广到有边缘的紧致流形。阿蒂雅的研究领域遍及代数学、代数几何学、拓扑学、分析学和理论物理学，是一位博大精深的大数学家。1966年获第六届菲尔兹奖。他说：“数学最使我着迷之处是不同的分支之间有许多的相互影响，预想不到的联系和惊人的奇迹。”就拿指标定理来说，它可以列入分析学、代数几何学、微分几何学、拓扑学的任何一个分支。它大大推进了微分算子的研究及整体数学的发展。

在双曲型偏微分方程方面，柯西问题的基本解$R(t, x; \tau, y)$在间断点附近的性质是阿达玛1932年研究的。1951年嘎丁建立了高阶双曲型方程的“嘎丁意义下的双曲型条件”；1952年，建立了“彼德罗夫斯基意义下的双曲型方程组”和“弗里德里克斯对称双曲型”。苏联的阿列里克1970年、卡若因1974年研究弱双曲型算子获得成果。1970年，阿蒂雅、勃特和嘎丁发展了彼德罗夫斯基1945年开创的双曲型算子的基本解的隙窝理论。巴拉班、克内斯和萨克姆托取得混合初一边值问题的研究成果。

混合型偏微分方程研究方面，弗里德里克斯是第一个有贡献

的人。1958年，他把包含椭圆型、双曲型、抛物型及Tricomi方程等各个方程的适定的边值问题归结为被他称作正对称组的一阶偏微分方程组的“可容许”边值问题，成功地进行了统一的论证，从而创立了线性正对称偏微分方程组理论。当然，弗里德里克斯理论并非完美无缺，它还需要发展、完善，这方面的工作中国数学家谷超豪取得了突破。

我国在偏微分方程这一领域的研究，始于1954年。混合型方程是50年代的主要研究对象，吴新谋、丁夏畦、王光寅等取得了成果。王柔怀在线性和非线性椭圆型方程组的解析性方面取得了较好结果。谷超豪50年代在拟线性双曲型方程边值问题研究上获得结果。青年数学家李大潜、俞文鮆70年代在此基础上，对这类边值问题发展了先验估计与不定边界处理等方法，建立起较系统的结果。他们在80年代初的工作，使可解性更完整，其方法适用于各种边界条件。谷超豪于1963～1964年发展弗里德里克斯理论，并开拓了线性与非线性情形的多个自变量的混合型方程的研究，取得了独创性成果。谷所取得的理论性突破，至今仍处于前沿地位。王光寅、姜礼尚等在非线性抛物型方程的不定边界问题方面，丁夏畦、张同等在拟线性双曲型方程的整体解存在性方面，分别得到较好的结果。

1978年，屠规章取得研究非线性波与孤立子的卓著成就，他发展了对称函数法，彻底解决了1970年孤立子理论创始人美国数学家克鲁斯卡尔提出的关于守恒律个数的一个猜想。

80年代初，张恭庆首先提出应用集值映射不动点的度理论，研究这类方程的解的存在性与个数，弄清了“不动点”与“方程解”之间的关系。从1973年起，张恭庆从受控热核装置中的磁面方程自由边界问题和石油勘探中的稳态水锥问题出发，抽象出带间断非线性项的偏微分方程问题，吸收了泛函分析及拓扑学中的方法，建立了研究这类问题的统一理论，取得了系统结果，同时

为解决有关实际问题提供了依据和方法，此项工作获1982年全国自然科学三等奖。张恭庆还发展莫尔斯（Morse）理论使之适用于非线分析问题的研究，并发展M. P(Mountain Pass)定理扩大其应用范围，这两项杰出的工作获1985和1986年度陈省身数学奖和1987年全国自然科学二等奖。莫尔斯理论本来是联系流形的拓扑与流形上函数临界点个数的一种理论．长期以来，人们大都应用莫尔斯理论来计算拓扑不变量，很少见到反过来用拓扑工具估计偏微分方程解的个数的工作。事实上，估计偏微分方程解的个数是一个困难的问题，需要寻求合适的新工具，而不象常微有相平面方法可以利用。1981年，张恭庆在美国《纯粹与应用数学通讯》发表的论文中首次成功地应用莫尔斯理论研究了渐近线性算子方程，获得了在偏微分方程中的一系列有趣的多解结果。1983年，又研究了Banach-Finsler流形上的莫尔斯理论，使之适用于一类偏微分方程解的个数的估计，证明了一类相当强非线性椭圆边值问题有三个解，他为了研究孤立（退化）临界点而引进了"Gromoll-Meyer对"的概念，使Rothe的莫尔斯临界群具有某种同伦不变性。张恭庆注意到用临界群区分临界点要比用拓扑度更精细，从而获得了"三临界点定理"、"渐近二次泛函临界点个数定理"，并轻易地重新得到了Красносельский-Rabinowitz分歧定理，发现了半线性椭圆边值问题哈密顿系统周期轨道以及半线性波方程周期解的许多新的多重性结果。关于保测变换不动点个数的阿诺尔德(Arnold)猜想自从为孔利—泽恩德尔（Conley-Zehnder）利用孔利指标证明之后不久，张恭庆完全不用孔利指标而用莫尔斯理论给出了一个简洁而自然的证明。M.P.定理是阿姆布罗斯蒂(Ambrosetti）和拉宾诺维兹(Rabinowitz）1974年提出的，它在非线性分析中具有基本的重要性。张恭庆在以下三个方面进行了推广：（1）把泛函从原来的C^1推广到局部Lip，从而使得这一变分理论能应用于一大类自由边值问题（1980年）。

（2）容许退化的情形，从而使这个变分定理与上、下解方法结合起来，由此发现了一个半线性椭圆边值问题至少存在两个解的一般性定理(1983)。许多人曾研究过同一方程，但未能发现这一现象。（3）推广M.P.定理到凸集上，其目的有二：（一）变分不等式的多重解问题的研究(1985年)。（二）普拉托问题多个极小曲面的存在性问题。张恭庆与厄尔斯(Eells)合作，从凸集上的M.P.定理导出了经典的Morse-Tomphins-Schiffmann定理，并把它推广到由黎曼曲面到非正曲率的黎曼紧流形的保角调和映射(1984，1985)。此外，张恭庆对数学物理中的基本粒子数学模型，对光学最优化设计、声纳布阵等，都取得了很好的结果。王光寅等深入研究柯西问题存在性中的离散现象，解决了美国数学家屈莱乌斯提出的一个问题。华罗庚系统地研究了偏微分方程的几何理论，对两个自变量的混合型方程以及在边界上蜕化的椭圆型方程得到了一系列结果。王柔怀在马斯洛夫指标、姜礼尚在拟线性蜕化椭圆型和拟线性抛物型方程、齐民友等在奇异微分算子研究中取得了好的结果。张同、李邦河、林龙威、屠规章等分别在守恒律双曲组、非线性波动方程的整体解以及守恒律等问题的研究中取得了有意义的结果。谷超豪应用微分几何理论首次研究了闵可夫斯基平面到完备黎曼空间的调映照问题，证明了非线性双曲型方程组理论中一个稀有的现象，该结果揭示了一个理论物理问题的规律性。谷超豪还继续对多元混合型方程开展系统的研究，得到了一大批关于存在性与唯一性的重要结果。

在偏微分方程的数值解法方面，老数学家冯康1965年独创了具有世界先进水平的"有限元法"，并最先建立它的理论基础。有限元法是解微分方程问题的一整套系统化、现代化的计算方法，它大大简化了许多工程设计的计算。70年代，他将有限元法拓广到椭圆型偏微分方程在由不同维数的流形连结起来的区域的一种理论上去。80年代初，冯康研究了有限元法中的边界元法，提出

了“正则归化方法”，又取得了新的重要进展。他还研究了间断有限元理论，对非协调元作了分类。他利用庞加莱型能量不等式和强弱两类间断元函数空间的嵌入定理，成功地建立了强、弱间断元的一般收敛性定理，具有很大的价值。林群提出了非线性特征值的迭代校正法，可用来加速偏微分方程的差分法和有限元法。至于有限元法的应用方面，由于成果很多，不再枚举。就有限元法而言，国外对“非协调元”收敛性研究已取得重要进展。斯图梅尔给出了非协调元收敛的充要条件，还举例说明广泛流传的分片保险不能保证非协调元的收敛性。巴布斯卡和阿斯波恩对二阶边值问题利用“网格相依范数”的有限元分析等工作，都取得了漂亮的成果。1982年4月在北京召开的中、法两国有限元会议上，冯康作了《椭圆边值问题的正则积分方程及其数值解》的学术报告；利翁斯作了《不稳定分布系统的最佳控制》的学术报告；巴布斯卡作了《有限元的后验误差估计和自适应方法》的学术报告，会上宣读论文44篇。

1982年8月23日至9月16日，第三届国际“双微”（微分方程与微分几何）讨论会在我国长春举行。讨论会主题是偏微分方程。霍曼德尔、谷超豪等9名中外数学家在会上作系统报告，其它代表宣读论文17篇，提供书面交流的论文15篇。会议涉及线性与非线性偏微分方程中普遍受关注的各领域。中外数学家认为，中国在偏微分方程研究方面进步较大，有很大发展前途。以后，每年在中国召开一次国际双微会议，对我国双微的研究和发展，起了重大推动作用。

Ⅱ. 常微分方程

常微分方程雏形的出现比微积分的发明还早。英国数学家耐

普尔发明对数，伽利略研究自由落体运动，笛卡尔在光学问题中由切线性质定出镜面形状等，都需要建立和求解微分方程。牛顿力学及微积分出现后，行星、卫星运动轨道问题变成一个常微分问题。但由于多体问题不能明显解出来，于是人们关心周期解的存在性，该问题的重要性源于行星或卫星轨道的稳定性问题。18世纪前半叶的研究重点是，对初等函数施行有限次代数运算、变量代换和不定积分把解表示出来，贝努里家族、黎卡堤、欧拉、拉格朗日等用各自的方法解决了一些特殊方程。下半叶讨论了求线性常微分程解的常数变易法（拉格朗日）和无穷级数解法等方法。到18世纪末，常微分方程发展成一个数学分支。19世纪，柯西最早研究解的存在性问题，1820—1830年间，他创立了可应用于方程$y'=f(x, y)$的关于初始问题解的存在性证明的第一种方法。1839—1842年，他又建立了有更广泛应用的二种方法——控制函数或优势函数的方法，又称作极限的计算。刘维尔(1838)、维尔斯特拉斯(1842)、毕卡尔（1890、1893）对初值问题的存在性、唯一性理论作了一系列研究，他们建立了常微分方程解的存在性的第三种方法——逐次逼近证明法。上述三种方法还可应用于高阶常微分方程和复数域中的微分方程组。布里奥和布凯1856年研究了由常微分方程定义的函数的奇点邻域内的解（一阶线性方程），从而成为用函数论方法讨论常微分方程的先驱。1857年，黎曼提出了处理用常微分方程定义的函数的新思想：从关于单值群的知识导出这些函数的性质。他在论文《对可用高斯级数$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$表示的函数的理论的补充》中，处理了超几何微分方程，而在讨论带代数系数的n阶线性微分方程时，留下了未解决的奇点理论的黎曼问题。在黎曼观点的启发下，德国数学家弗赫斯把奇点工作引向深入。他放弃了黎曼的途径而直接研究微分方程，他从1865年开始，不但把线性常微分方程，而且把整个常微分方程的理论普遍地引进复函数论领域，从而创立了复域中的

线性常微分方程论，奠定了这个理论（弗赫斯理论）的基础。奇点理论的黎曼问题与线性常微分方程的大范围理论密切相关，在19世纪后半期仍是数学家所研究的对象。直至1905年，希尔伯特和克罗格借助于积分方程理论才第一次给出完全解，即证明了任意预先指定的单值群变换的线性常微分方程解的存在性（这是希尔伯特23个问题中的第21问题，1957年德国数学家勒尔（H·Robrl）、1970年法籍比利时数学家德利涅又给出了优越的解答）。1877—1878年，美国数学家希尔发表关于月球运动的论文，创立了周期系数的线性齐次方程理论，他求出了对月球运动的诸微分方程确定一个近似于实际观察到的运动的周期解，并证明了二阶微分方程有周期解。然而，希尔的工作一直受人嘲笑，庞加莱1885年对它进行完善，才使希尔及其理论为人们重视。为了更深入地讨论线性微分方程，庞加莱还和德国数学家F.克莱茵于1880—1884年间创立了在微分方程理论中起重要作用的自守函数理论。在这里，自守函数系指圆函数、椭圆函数、双曲函数及初等分析中其它函数的推广，而且还指在变换群

$$Z'=\frac{az+b}{cz+d}$$

或这个群的某些子群作用下不变的函数，其中a、b、c、d为实数或复数。这就使得一类线性微分方程都可用上述新的超越函数来求解。

由于天体力学中的“三体问题”的运动方程不可能用已知函数明显地求解，促使庞加莱开始了非线性常微分方程的定性研究，他寻求通过考察微分方程本身就可以回答的方法、开辟了微分方程定性理论的新方向，换句话说，开辟了（行星运动以及行星和卫星轨道稳定性的）微分方程周期解研究的新途径。1881—1886年间，庞加莱发表一组四篇题为《由微分方程所确定的积分曲线》的论文，完全用独创的方法探讨稳定性问题：奇点邻域内积

分曲线的几何拓扑结构；奇点的指数以及奇点在大范围和全局分布；极限环（孤立周期解）问题及环面上的积分曲线；空间周期解的存在性及其附近积分曲线的几何拓扑结构。庞加莱一反过去具体局部求解的办法，而重点考察大范围内解的曲线形态，发现了微分方程的奇点起关键作用。于是，他把奇点分为焦点、鞍点、结点和中心四类，而后研究解在奇点附近的性态。这就可定性地确定解的稳定性。他还于1890年引进渐近解的概念，发现了一类新的解。

与庞加莱依赖几何拓扑直观研究常微分方程定性理论不同（虽然他们的工作互有影响），1892年，俄国数学家李雅普诺夫从另一个角度即以严格的分析证明深入研究稳定性问题，证明了在奇点附近解的稳定性依赖于特征方程的根，当且仅当特征方程的根满足都具有负实部这个条件，方程所有解才是稳定的。庞加莱和李雅普诺夫的工作共同奠定了稳定性理论基础。

1901年，瑞典数学家本迪克森给出判断某区域内闭轨道（周期解）不存在的准则和所谓庞加莱一本迪克森定理的证明，该定理对方程$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$存在周期解给出了一个肯定判定。本迪克森的工作是对庞加莱开创的微分方程解的拓扑性质的研究的一个最有意义的贡献。

德国数学家弗洛贝纽斯(1873)、兰朵（1920年）把常微分方程形式地作因式分解处理。法国数学家毕卡尔把伽罗瓦理论引入线性常微分方程。挪威数学家李运用连续群思想，对用初等函数积分式能否表示出常微分方程通解的问题做了总结性工作，从而进一步促使常微分方程的研究重点转向解析理论和定性理论。自此，常微分方程理论发展为解析法，几何法和数值法这三个主要方向。

对天体力学和分析力学的研究导致了动力系统理论的产生，

它主要研究微分方程的解的大范围性质。其基本的问题是弄清当时间趋于无穷时解的行为即整体或局部解在空间中的“最终样子”。对动力系统中的“二体问题”即两个物体在引力作用之下的运动的微分方程，牛顿早已完全解出，但三体问题无精确解。从18世纪起，主要运用摄动法，通过级数展开研究了三体问题的多种特殊情形。对于“狭义三体问题”即三体中有一体质量甚小而对其它二体运动忽略不计的情形，庞加莱证明了运动方程的解除已知的雅可比积分外，不存在其它解析解。他还猜想，该问题存在无穷多周期。在他逝世前几个月，他把这个问题归结为一个拓扑定理，即所谓“庞加莱最后定理”：由两个同心圆构成的圆环保持面积不变，且在两同心圆上方向相反的一对一连续映射，一定在圆环内至少有两个不动点。对这个天体力学中的高难度问题的研究，使庞加莱获得最大声誉。庞加莱逝世还不到半年，美国数学家伯克霍夫就出人意料地给出了这个定理的精采证明，震惊了欧洲数学界。在微分方程解的性质之一——回归性方面，庞加莱得到一个著名的回归定理：在保测变换下，动力系统除了测度为0的集合外，回到原来状态的次数可有无限多。在庞加莱的影响之下，伯克霍夫利用拓扑方法研究回归问题，他发明了极大极小方法推进了动力系统的研究，这个方法后来被他的学生莫尔斯在1925年推广为著名的“莫尔斯理论”——它把拓扑和分析紧密地联系起来，成为数学研究中一个主要工具。动力系统的理论研究兴起于20世纪60年代，它较之于微分方程定性理论已产生质的不同，目前已成为微分方程与大范围分析中非常活跃的分支。哈密顿系统的周期轨道的研究、非一致性双曲的微分系统的遍历理论……仍是特别活跃的领域；叶状结构理论在某种意义上成为动力系统理论的有机组成部分；从动力系统及遍历理论的角度可研究李群的离散子群研究中提出的一些问题；动力系统的研究，不仅是非线性分析中许多方法的起源和非线性分析的一个最有力的

工具"弗雷歇空间中隐函数定理"的起源，而且与向量场、群作用、微分形式等几何对象在奇点领域中的标准形问题的研究有联系。美国、苏联在动力系统理论研究中成就尤为显著，法国、中国在世界上也享有声誉。例如，1960年以后、苏联数学学派和美国数学家斯梅尔研究紧微分流形上动力系统的分类及流形上的同胚，佩梭托(Peixoto) 1973年解决了二维问题。

20世纪30年代以来，定性理论中的重要研究对象——孤立周期解（极限环）在无线电理论中找到了它的对应物——孤立稳定的等幅振荡，使常微分方程定性理论得到实际应用，从而促进它飞跃发展。1929年，苏联物理学家安德洛诺夫第一个指出上述本质联系，并系统地应用定性理论，在分析自振系统方程中得出了一系列重要结果，从而开拓了常微分方程定性理论的一个重要应用领域——非线性振动。另外，庞加莱环面理论的系统整理、一些不确切地方的严格化和一个遗留问题的解决，则是法国数学家邓若瓦1932年在《关于环面上的微分方程所确定的曲线》这篇文章中作出的。

希尔伯特第16问题是常微分方程理论中一个著名的国际数学难题，它的一个重要的内容，是要解决右边是n次多项式的微分方程的孤立周期解的最多个数$N(n)$和它们的相对位置。这在物理、力学、工程上都有很大意义。1974年，美国数学会开了一次专门会议，总结希尔伯特23个问题的研究工作成果，唯独第16问题留下空白。这个问题由于中国数学家史松龄1978年的工作，秦元勋1983年的工作而有了突破。我们在前面"希尔伯特23个数学问题及其解决情况"中已作了介绍，于此不再赘述。

我国对常微分方程的研究，自50年代以来取得了长足进展。50年代，在鞍点型条件稳定性、带时滞稳定性、有限时间稳定性、周期解的存在性以及二次微分系统的极限环分布等方面取得了成果。特别是秦元勋在研究了单调的多重类型方程之后，又研究了

有二次代数极限环的方程，从而得到存在性的充要条件、唯一性。稳定性，以及由奇点及极限环所决定结构的唯一性和稳定性。张学铭对特征指数稳定性所得到的深入结果，比当时世界上最优秀的B.F.Bylov的要好。他建立了关于时滞系统稳定性的四个重要定理，用泛函方法构造了李雅普诺夫函数，并给出了稳定性判据。因而引起国内外重视，苏联、美国、西德等国的《数学评论》对张的研究成果给予了很高的评价。

60年代初，当常微分结构稳定性问题刚在国际上开始引人注意时，廖山涛便着手研究。经过十几年努力，这位当年获美国芝加哥大学博士学位的北京大学教授，终于开辟出一条具有他自己特色的探讨结构稳定性的新途径，并取得了一系列具有国际先进水平的重要成果。目前，对常微系统结构稳定性的研究，有两种流行方法：一是稳定流形与非稳定流形的方法，一是泛函分析方法。廖山涛在这两种方法之外引进典范方程组和阻碍集的新方法，从而对微分流形上常微系统相空间的探讨，可以用适当方式部分地化为欧氏空间上常微分方程来解决。与前两种方法比较，廖山涛的新方法在应用中不象前两种方法那样较多地受到流形上系统的双曲构造的牵制，因而应用上更具广泛性。廖山涛对结构稳定系统的特征问题也作了深入研究。美国著名数学家斯梅尔为探讨这一问题提出双曲构造、公理A和（几何）强匀断条件等概念，并推断：紧致微分流形上C微相变换是结构稳定的，当且仅当它满足公理A和（几何）强匀断条件.后来，罗宾(Robbin)和罗宾逊(Robbison)在一系列论文中证明了这条件的充分性，得到R—R定理，即紧致微分流形上C常微系统，如果满足公理A和(几何)强匀断条件，它的结构是稳定的。廖山涛运用阻碍集的方法得出了一个包括R-R定理作为特例的更广泛结果，他除了发现阻碍集理论及其在结构稳定性的充要条件上的应用外，还取得了一批重要成果：（1）关于C^1封闭引理完全可靠的证明，进而讨论

了常微系统族X^*等。（2）独立研究了在流形上由微分动力系统所引起的各态历经性质（各态历经理论最初的基本定理是著名美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼和美国数学家伯克霍夫等人用数学方法研究统计力学中的各态历经假设而建立的）。（3）得出了强匀断的充要条件，并推出线性强匀断蕴涵公理A。（4）首先证明了流形维数为2时，由微分同胚所产生的离散系统的稳定性推测，并得出有关的结果。80年代初，张筑生应用后一成果给出了斯梅尔提到的一个问题的答案。引人注目的成果还有：秦元勋关于近似解析解的理论；叶彦谦等关于二次微分系统的极限环分布与个数的深入研究；叶彦谦、丁同仁、王现关于电子注聚焦理论锁相技术中的非线性微分方程的研究；林振声关于概周期方程的弗罗奎理论和积分流形的理论；赵素霞关于自动调节系统稳定性方面的结果。

80年代初，除廖山涛在60年代工作基础上建立起如前所述的微分动力系统一批重要理论外，王明淑、陈兰荪也独立地得到与史松龄相同的“至少存在有4个极限环的二次微分系统”的例子。张芷芬证明了利埃纳型方程极限环的唯n性的猜想，而且对更广泛的一类方程，证明了极限环的唯n性；丁同仁证明了一类适用于非耗散系统的不动点定理，在调和解的研究中取得了进展。

第 七 章

现代数学发展概观之三：函数论

函数论包括复变函数论和实变函数论。复变函数论又分为多复变函数论与单复变函数论，内容主要包括单值解析函数理论、黎曼曲面理论、几何函数理论、自守函数和模函数理论、广义解析函数理论、值分布理论、复变函数逼近理论等；实变函数论的主要内容包括积分论、积分变换、逼近论、傅里叶分析和描述理论等。

Ⅰ．复变函数论

（1）奠基性工作

复变函数论始于18世纪欧拉、达朗贝尔和拉普拉斯的研究工作。他们在高斯以及韦塞尔、阿尔冈建立复数直观意义即把复数与平面向量对应起来解决实际问题的几何表示的基础上，对单复变函数理论进行了探索，但他们的工作仅局限于对$f(x+iy)$的实部和虚部分开情形进行讨论。这些讨论涉及部分分式积分法、确定负数与复数的对数、实系数多项式的分解以及保形映射等。

复变函数论的全面兴起是在19世纪。象微积分的直接扩展

——分析学（包括微分方程、无穷级数理论、微分几何、变分法等）统治了18世纪那样，复变函数论（单复变函数论）曾统治了整个19世纪。柯西、黎曼、维尔斯特拉斯是复变函数论的三个主要奠基人。

高斯引进了单复变函数的一些基本概念，1811年他指出积分$\int\varphi(x)dx$通过不同的路径时，只要$\varphi(x)$在两路径所围成的区域内是单值且有界的，那么积分值是唯一确定的。而当$\varphi(x)$变为无穷时，积分值可以有多个，这取决于选取的闭路径围绕$\varphi(x)$变为无穷的点的次数。普阿松在1815—1820年研究了沿复平面上的路径所取的复变函数的积分，指出沿一条虚路径同沿一条实路径的积分值不一定相同。

复变函数论的第一篇重要论文是柯西1814年在巴黎科学院宣读的《关于积分理论的报告》。他考察了方程

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (\bullet)$$

建立了由实到虚(复)过渡的全部理论，这里的$P(x, y)$、$Q(x,y)$是关于实变量x、y的两个实函数，且在点$z=x+iy$可微，复变函数$W=f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$。后来黎曼在1846年以比较$\frac{dW}{dz}$与$\frac{dy}{dx}$为出发点，得到当且仅当$\frac{dW}{dz}$之值与dz无关时W为解析函数。从而得到所谓柯西—黎曼微分方程($\bullet$)。

自1821年后几乎二十五年中，柯西单独一人发展了复变函数理论。他1825年写成、1874年发表的《关于积分限为虚数的定积分的报告》，是他最重要的也是数学史上最瑰丽的论文之一。在这篇论文中，他采用以复值代替$\int_a^b f(x)dx$中的常数及变数的方法来计算积分。他讨论了积分

$$\int_{x_0+iy_0}^{x+iy} f(z)dz, \qquad \text{其中} z=x+iy$$

并且把这个积分定义为和数

$$\sum_{v=0}^{n-1} f(x_v+iy_v)[(x_{v+1}-x_v)+i(y_{v+1}-y_v)]$$

的极限，其中x_0，x_1，…，X以及$y_0, y_1, \cdots, Y$是沿着从(x_0, y_0)到（X，Y）的路径的分划点。这里$x+iy$肯定是复平面上的一个点，并且积分是沿着一条复的路径。他还运用变分的方法，证明了如下定理：如果$f(x+iy)$对$x_0 \leqslant x \leqslant X$和$y_0 \leqslant y \leqslant Y$为有穷且连续，则上面的积分值与函数$x=\phi(t)$、$y=\psi(t)$（$t$为实数）的形式无关。当然，这个证明并不令人满意，因为柯西确信连续函数必可微，而导数只当在函数本身的间断点才间断。这是18世纪和19世纪初所有数学家的局限性。1826年，柯西在论文《数学练习》中提出积分留数的概念：$F=\lim_{z \to z_1}(z-z_1)f(z)$，$z_1=a+ib$。他指出，$f(z)$在$z_1$的留数也是$f(z)$展为$z-z_1$的幂级数展开式中项$(z-z_1)^{-1}$的系数。1841年，他又给出了在一个极点的留数的一个新的表达式

$$F(z_1)=E[f(z)]_{z_1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

柯西的留数理论推动了复变函数论的发展，应用它可以计算一些复杂的实函数的定积分。1831年，柯西得到定理：函数$f(z)$能够按照马克劳林公式展为一个幂级数，它对所有这样的z收敛。在证明定理时，导出了著名的柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt$$

其中C为区域D的边界，z为D内任一点。

1846年，柯西发表论文《关于伸展到一个闭曲线的所有点的

积分》，将解析函数 $f(z)=u+iv$ 沿着一个单连通区域边界曲线的积分和展布于该区域上的积分联系起来。于此，他不仅对矩形给出了与路径无关的基本定理的一个新证明，而且还将它推广到不自交的闭曲线。同年，柯西在另一篇论文中给出了关于沿着一条任意闭曲线的积分 $\int f(z)dz$ 的一个新叙述：若曲线包围着一些极点，则积分之值是函数在这些极点上的留数之和的 $2\pi i$ 倍，即

$$\int f(z)dz=2\pi iE[f(z)]$$

其中 $E[f(z)]$ 是用来表示留数之和的记号。

在1846年的两篇论文中，柯西已经改变了对复函数的观点，与他1814、1825和1826年的工作相对立。他不再关心实积分及其计值，而是转向复函数理论本身，并为这个理论建立基础。柯西也曾处理过多值函数的积分（1846年），但他关于多值函数的积分概念依然是模糊的，直到逝世前6年（1857年）的几篇论文中，他虽然引入了分支切割的概念和其它新的术语，给出了关于复函数性质的一些更谨慎的叙述，特别是肯定了复函数本身及其导数的连续性对于幂级数展式的必要性等等，但他对极点与支点的区别仍是混淆的。

澄清多值函数概念，建立多值函数的宽广理论，从而开创了代数函数及其积分与反函数理论的新的发展时期的是德国大数学家黎曼。他继承并极大地发展了柯西的思想，抓住了解析函数是黎曼面即一维复解析流形上的函数这个关键点。所谓多值函数是指具有支点的完全解析函数 $W=F(z)$，对存在区域中 z 的一个值，W 有多个值和它对应。黎曼在柯西、皮瑟（Puiseux）研究的基础上（尽管他们所提供的方法有很大局限性），做出了卓有成效的探讨。他在高斯指导下写成的博士论文《单复变函数的一般理论基础》（1851年），是复变函数论的一篇基本论文。他创造了黎曼面这种模型代替通常的 z 平面，从而能够使 W 的值与 z

的值一一对应。这就不仅提供了描绘多值函数的一个方法，使多值函数概念和分支、支点、支割线等概念有了几何的明显表示和说明，而且有效地使多值解析函数W在黎曼面上成为单值解析函数，与z平面上的情形相对应。这样，就可以把单值函数的有关定理推广到多值函数情形。例如，单值函数沿着一个区域（在其中函数为解析）的边界曲线的积分为零的柯西定理，被黎曼推广到多值函数，而解析区域在黎曼面上必须单连通，即可收缩到一点。

黎曼还在其博士论文中，将高斯1825年关于从一个平面到另一个平面的保形映照推广到黎曼面，得到了保形映照的基本定理，即证明了单叶解析函数作映照的保角性，从而开辟了保形映照研究的新篇章。

1857年，黎曼发表四篇重要论文，利用狄里克雷原理对阿贝尔积分和阿贝尔函数赋予了重要的进展。他把阿贝尔积分分为三类(在黎曼面上)；阐明了在黎曼面上能够存在哪些种类的函数；证明了第一类函数（曲面上的单值函数，它的奇点是极点）是代数函数，而第二类函数（在具有横剖线的曲面上是单值的，但沿着每一横剖线是不连续的函数）是代数函数的积分；证明了代数函数可以用超越函数的和来表示；开辟了复变函数论的另一个新的研究方向——阿贝尔积分的反演，即当

$$u=\int_{O}^{z}R(z,\ W)dz$$

时，把z确定为u的函数，其中W和z由一代数方程联系着；得到了在亏格为p的黎曼面上的函数的一个重要结果——黎曼一洛赫定理，这个定理是由黎曼开始而由德国数学家洛赫（1864年）完成的，它确定了在至多有有穷个极点的曲面上线性无关的亚纯函数的个数。黎曼的代数函数论的出现，堪称划时代的贡献。他关于用双有理变换替代射影变换作为研究基础的黎曼面思想以及所

得到的作为它的示性数的亏格（最早的绝对不变量）的概念、黎曼—洛赫定理等，不仅推动了几何函数论的发展，而且也预示着曲面拓扑学的萌芽，还导致了后来的代数几何学、复解析几何学的重大发展。

维尔斯特拉斯鉴于柯西、黎曼的理论建立在几何观点上，转而构造复变函数的严格算术理论。他以幂级数为出发点形成了解析函数理论，把解析函数定义为可展成幂级数的函数，把多项式与有理函数的理论推广到超越函数，利用函数的奇点来讨论广义函数的性质。他还建立了解析开拓方法，利用解析开拓定义完全解析函数。通过解析开拓，就可以把柯西的方法（研究完全解析函数的单值分支）和维尔斯特拉斯的理论统一起来。法国数学家波雷尔1917年揭示的关于解析函数的理论，则扩展了维尔斯特拉斯的解析函数概念，将之发展成为拟解析函数理论。

维尔斯特拉斯还把实多项式分解为线性因式的定理推广到整函数，从而得到了关于整函数因式分解的基本定理。对复杂性仅次于整函数的亚纯函数，他证明了亚纯函数可以表示为两个整函数的商。

上述诸项工作，完成于19世纪40年代，发表于1876年。

1860年左右，维尔斯特拉斯开始研究椭圆函数和阿贝尔积分。他与黎曼讨论阿贝尔积分的做法相反，是由代数函数来建立超越函数的，因为他认为极小化狄里克雷积分的函数的存在并未得到证明，有理由不相信狄里克雷原理。他把椭圆函数表示成幂级数的商。1882年，他通过积分的反演创造出基本的椭圆函数——维尔斯特拉斯P函数，并使椭圆函数理论进一步系统化和完备化。

椭圆函数论创始于19世纪20年代，它与复变函数论基本定理的发展并驾齐驱。所谓椭圆函数是指具有双周期的亚纯函数，也就是在有限复平面上除去有限点处处解析的函数。虽然椭圆函数论中的许多关键性结果，在高斯死后从他的未发表的论文中能找

到，但公认的椭圆函数论创始人是挪威数学家阿贝尔和德国数学家雅可比，两个人都得到了从椭圆积分的反函数作为研究的突破口这一关键性思想。

阿贝尔的论文从1827年起开始在《克列尔杂志》和格高尼的《年报》上发表。他研究了变数和指数都取复值的二项式定理，并利用所谓的雅可比虚变换将它推广到纯虚值。他提出从总体上来定义椭圆函数，建立了椭圆函数的加法定理——它是椭圆积分加法定理的类似物。在对自变量的实值和虚值定义了椭圆函数之后，阿贝尔借助于加法定理，将定义推广到复值。他得到了椭圆函数是单值的双周期的重大发现，引进了探索椭圆积分的关键思想——椭圆积分的反演。他还将伽罗瓦开始的推广椭圆与超椭圆积分的研究推向前进，迈出了较重要的开创性步骤：证明了阿贝尔基本定理——“几个具有形式$\int R(x, y)dx$的积分之和可以用p个这样的积分加上一些代数的与对数的项表示出来。另外，这个数p只依赖于方程$f(x, y)=0$，而事实上，它就是这个方程的亏格。”这个定理是椭圆积分加法定理的一个很宽的推广。这里，阿贝尔对一般的$f(x, y)=0$的少数几种情形，实际上计算了数p。虽然他并未看出他的结果的全部意义，但他肯定在黎曼之前就已认识到了亏格的概念并建立了阿贝尔积分这个科目，从而开创了比椭圆积分和相应函数更困难的积分——超椭圆积分理论。19世纪的法国大数学家埃尔米特（对函数学一般理论、特殊函数论、复变函数论、经典数学分析、微分方程与积分方程理论、数论、代数型理论、几何学以及力学等，都有杰出成就，特别是关于椭圆函数论及其应用和证明e的超越性更是举世闻名）后来评价说：阿贝尔留下的一些思想，可供数学家们工作150年！

雅可比于1827年开始研究椭圆函数，几乎与阿贝尔同时。阿贝尔所获得的结果，有许多雅可比也独立地得到了。特别地，雅

可比1829年发表的《椭圆函数基本新理论》是一部关键性的著作。与阿贝尔的探讨途径不同，雅可比将其椭圆函数理论建立在被称作θ函数这一辅助函数的基础上。他引进了四个θ函数作为构造椭圆函数的最简单的元素，并得到θ函数的各种无穷级数和无穷乘积的表示式。他还在阿贝尔的工作启发下，研究了θ函数与数论之间的关系，对这种联系的研究随后由埃尔米特、克罗内克等人继续进行。对θ函数的多种不同形式之间的关系的探讨成为19世纪数学家的研究主题。

1835年，雅可比在一篇论文中证明了：如果单变量的一个单值函数对于自变量的每一个有穷值具有有理函数的特性（即为一亚纯函数），它就不可能有多于两个的周期，而周期的比必须是一个非实数。这是一个重要的发现，它开拓了一个新的研究方向——寻找所有的双周期函数。从雅可比的定理出发，法国数学家刘维尔1844年建立了双周期椭圆函数的一个完整的理论，他发现了椭圆函数的一个实质性性质及其理论的一个统一观点，双周期函数虽然是比椭圆函数更广的一类函数，但它们具有椭圆函数的所有基本性质。

最后，有必要指出，柯西、黎曼和维尔斯特拉斯奠基复变函数论的思想和方法，在一段较长时间内被他们的追随者继续研究着，后来，前两者的思想被融合，而维尔斯特拉斯的思想逐渐从柯西、黎曼观点推导出来。20世纪初，三者思想才完全统一。

（2）单复变函数论的发展

19世纪末叶，以单复变函数论为主要内容的复变函数理论迅速发展。维尔斯特拉斯对整函数与亚纯函数的研究；毕卡尔对各种类型的复函数取值范围的研究；施瓦兹和刘维尔对有界函数论的研究；津生和科恩将狄里克雷级数作为幂级数的推广；阿达玛、波雷尔、E. 法布利对幂级数与奇点的研究，等等，取得了

一系列深刻结果，并将这些论题带入20世纪。例如，作为有界函数论的古典定理之一的施瓦兹引理，后来一直是单复变函数论和多复变函数论中十分活跃的研究领域。

20世纪初，阿达玛（1908）、国枝元治（1916）、兰朵(1921、1927）、波利亚（1923）等一大批学者对狄里克雷级数作了进一步的研究，直到世纪中期田中忠二（1951）对收敛域和曼德尔布洛特（1954，1963）对狄里克雷级数奇点与系数关系的研究。哈代、利特尔伍德（1921）等对幂级数的阿贝尔连续性、兰伯特级数和过渡收敛等得到了重要结果。而对有界函数建立比较系统的研究结果，则是由林德洛夫、F.黎斯、M.黎斯、阿达玛、哈代、利特尔伍德和卡拉热沃多利等数学家在本世纪二十年代作出的。

值分布论　复解析函数$f(z)$取某个值ω的点z的分布状态，称为它的值分布。1879年，法国数学家毕卡尔利用模函数的反函数证明了作为值分布理论的起源的“毕卡尔定理”：对于所有有限值ω，超越整函数$f(z)$都具有无穷多个ω点，至多只有一个例外值。沿着这个方向得到了非常多的成果，它不仅促进了整函数值分布论的发展，而且被推广到亚纯函数。法国数学家波雷尔、居里亚（G.Julia)、阿达玛、瓦里隆（G.Valiron）等在值分布理论中都取得了许多重要成果。其中最重要的是1925年芬兰数学家罗尔夫·奈望林纳发表的关于亚纯函数值分布的所谓“奈望林纳值分布理论”，它把过去法国学派的结果总结整理并加以深化，定量地给出函数取值的限制，成为一个系统理论，从而开辟了一个新的研究方向，奠定了“奈望林纳理论”这一函数论分支的基础。奈望林纳的学生、美籍芬兰数学家拉尔斯、阿尔福斯1930年在其博士论文中证明了由法国函数论专家邓若瓦提出的、经过许多数学家二十年的研究仍未解决的一个猜想（如果整函数的阶为p，有限的渐近值的个数为n，则这两个数之间有关系$n\leqslant 2p$)。之后，又于1935年用拓扑方法建立了覆盖面理论，作为它的应用，

概括了奈望林纳理论和关于亚纯函数的许多其它大定理。由此理论还辨明了毕卡尔例外值的个数2的拓扑意义。这一系列重要成就，使国际数学界大为震惊。在1936年挪威首都奥斯陆召开的国际数学家大会上，29岁的阿尔福斯成为首届菲尔兹奖得主。二次世界大战以后，阿尔福斯到美国哈佛大学担任教授，对黎曼面形成的3ξ-3维空间的结构进行研究，通过拟保角映射及其它工具，获得了一系列重大成就，使这个领域成为单复变函数论最活跃的分支。阿尔福斯在函数论研究领域的独创性贡献和卓著成就，使他荣获一系列崇高的荣誉：

1953年当选为美国国家科学院院士，并任芬兰科学院院士和瑞典、丹麦等国皇家学会会员，美国数学会副主席；

1962年、1978年两次被邀请在国际数学家大会上作一小时的报告；

1982年荣获美国数学会颁发的斯蒂尔奖；1981年荣获当代世界最高数学奖——国际沃尔夫奖。该奖由以色列设立，专门奖励当今世界上成就最大的数学家。这样，阿尔福斯成为迄至1984年止世界上荣获菲尔兹奖和沃尔夫奖两个大奖的仅有两名数学家之一（另一名是日本数学家小平邦彦）。

在值分布理论的早期工作中，瓦里隆(1929)、塞尔贝格(1930)等分别用不同的方法对代数体函数建立了相当于亚纯函数的奈望林纳理论的基础。此后，代数体函数值分布理论的研究获得一系列进展。七十年代，整函数和亚纯函数的某些深入的结果已推广于代数体函数。

关于整函数和亚纯函数值分布论中“亏值”和“波雷尔方向”的研究，中国数学家杨乐、张广厚遥遥领先。60至70年代初，杨乐、张广厚最早发现并建立了值分布论中两个重要概念，即“亏值”和“波雷尔方向”之间具体的联系，证明了一个有穷正级亚纯函数，若记它的亏值个数为p，波雷尔方向个数为q，则

有关系式$p \leqslant q$，给出了亏值个数的准确估计；彻底解决了亚纯函数的波雷尔方向的分布规律问题，这一系列独创性成果达国际先进水平。八十年代初期，杨乐、张广厚继续深入研究了一类整函数的亏值的性质，在导数和重值方面获得了精确的结果。对角域内全纯函数的值分布，与英国著名数学家W.K.海曼教授合作，圆满地解决了数学大师利特尔伍德的一个猜想：设$f(z)$在角域S内全纯，在较小的角域S'内其级$\geqslant \rho(0<\rho<+\infty)$，且在$S'$内$f(z)$的零点的收敛指数也$\geqslant \rho$，利特尔伍德曾猜想在$S$内$f(z)$的$a$值点的收敛指数恒$\geqslant \rho$，至多除去一个有穷复数$a$。杨乐与海曼证明了如果达到级$\geqslant \rho$的序列$\{\gamma_\nu\}$适合（*）

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\log \gamma_{\nu+1}}{\log \gamma_\nu} = 1$$，则上述结论成立。他们还构造了函数，指出结论成立的条件（*）是最佳的。杨乐还证明了：设$f(z)$为$\lambda(0<\lambda<+\infty)$级整函数，则存在一条方向，使得在含此方向的任意角域内，$f(z)$的重级$\leqslant k$的a值点的收敛指数与$f'(z)$的重级$\leqslant l$的b值点的收敛指数两者之中至少有一个等于λ。这里，a、b为两个任意的有穷复数，且$b \neq 0$；k、l为任意的正整数，且

$\frac{2}{k}+\frac{1}{l}<1$。杨乐还在亚纯函数的亏函数的研究这个困难问题上，首次获得了重要结果。杨乐先后应邀参加在瑞士、西德、美国举行的国际函数论会议，多次赴国外作学术报告，受到高度评价。杨乐现为中国科学院学部委员。张广厚在《关于整函数的渐近路径的长度》一文中，肯定地解答了1964年海曼和1973年埃德斯在两次国际函数论会议上提出的一个问题。杨乐、张广厚的成就荣获1982年全国自然科学二等奖。

A.伯恩斯坦1979年7月在英国 Durham 复分析会议上的报告证明了：设$f(z)$在$|z|<1$内全纯，$f(z) \in BMOA$的充要条件是

$$\sup_{|a|<1}\left\{T\left(1,\ f\left(\frac{Z+a}{1+\bar{a}Z}\right)-f(a)\right)\right\}<+\infty$$

W.H.J.弗赫斯1980年3月在美国普度大学举行的经典复分析会议上的报告证实了D.J.牛曼提出的一个猜想。牛曼猜想是：若无界区域D至少有一个有穷边界点，$f(z)$在D内全纯，且对D的每个有穷边界点ζ有

$$\overline{\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}}}|f(z)|\leqslant 1$$

又设 $\lim\limits_{r\to\infty}\sup\limits_{\substack{|z|=r\\ z\in D}}|f(z)|/r=0$，则有$|f(Z)|\leqslant 1$.

苏联数学家A.A.戈尔德别尔格与A.Э.叶列明科1979年否定了W.K.海曼提出的一个猜想。海曼曾猜想相应于渐近值∞，存在渐路径，它在圆$|z|\leqslant r$内部分的长度为$o(r)$。

中国数学家顾永兴1979年证实了海曼的一个猜想：对域D内的一族亚纯函数，如果族中每个函数$f(z)$在D内有$f(z)\neq 0$，$f^{(K)}(z)\neq 1$，则该族应是正规的。

中国数学家庄圻泰1980年指出在波利亚峰序列与型函数间存在紧密联系，并给出关于波利亚峰的一些定理的推广。庄圻泰、熊庆来、李国平五十年代就对整函数与亚纯函数联系到导数的一些基本理论及解析函数正规族理论取得了研究成果。

中国数学家吕以辇1980年证明了：若设$w(z)$为由$\psi(z,w)\equiv A_V(z)w^V+A_{V-1}(z)w^{V-1}+\cdots+A_0(z)=0$定义的$V$值代数体函数，其下级$\lambda$有穷。则当$\lambda\geqslant\frac{1}{2V}$时，$w(z)$的直接超越奇点的数

目$p \leqslant 2V\lambda+2(V-1)$，当$\lambda<\frac{1}{2V}$时，有$p \leqslant 2V$。

复变函数逼近论　复变函数逼近论自19世纪末以来，一直是数学家们感兴趣的领域，其研究方向有：复平面闭集上多项式和有理函数的逼近；复平面闭集上多项式最佳逼近；具有给定极点的有理函数的最佳逼近；具有自由极点的有理函数的最佳逼近；函数系$\{Z^{\lambda n}\}$在无界曲线、无界区域、非卡氏区域上的完备性；函数系$\{X^{\lambda n}\}$的最佳逼近；函数系$\{f(\lambda_n Z)\}$的完备性；等等。

五十年代，中国数学家陈建功、李国平、程民德等在函数构造论，全纯函数的多项式逼近，连续函数及全纯函数的整函数线性组合的逼近，多元周期函数三角多项式的最佳逼近，特殊函数的最佳逼近等方面，开展了有价值的研究。徐利治与王仁宏于六十年代发展起处理无界函数逼近的有效方法"扩展乘数法"。1980年，王仁宏又引进了"拟局部正算子"概念，使扩展乘数法获得更广阔的应用，他还证明了"任意无界连续函数均可用多项式进行逼近"的定理。

1980年，沈燮昌、孙永生、王斯雷等在函数逼近论研究中取得了新结果。沈燮昌在六、七十年代对具有固定极点的有理函数的最佳逼近、函数系$\{Z^{\lambda n}\}$在复平面上的完备性以及函数系$\{f(\lambda_n Z)\}$在无界区域上的完备性等问题的研究中，以不同于国外数学家以往所有的工作，独具特色地获得了（包括以往已知结果或一系列经典结果的）出色的成果。八十年代初，他又在一类很一般的K_q区域上得到了用具有固定极点的有理函数逼近函数时，最佳逼近阶的估计式及有理函数级数展开式。

苏联数学家库里科夫1979年研究区域上的比贝尔巴赫多项式，改变了过去要求区域边界满足李普希兹条件的要求，只假定了边界包含有有限个旋转点，且在这些点的邻域中满足适当条

件，在L_p空间中逼近映射函数，得到了逼近阶的估计。

苏联数学家鲁沙克1979年对具有固定极点的有理函数在单位圆上引进了费叶尔、瓦利—卜辛、加克森算子，得到了最佳逼近的阶的估计，并给出了具有自由极点的有理函数的最佳逼近的精确估计式。克达里亚对费叶尔算子作了推广。罗夫巴把按照切贝晓夫多项式展开的理论推广到具有极点的有理函数中去。维雅契斯拉沃夫在区间上对L_p空间中用有理函数逼近逐段解析函数，得到了阶的上下界估计，包含了过去已知的一些结果。

苏联数学家斯托罗任科1980年将H_p空间中的加克森（Jackson）定理推广到$0<p<1$的情形，谢夫丘克进一步研究了由嘉迪克开始研究的关于区域上多项式最佳逼近的阶的估计依赖于区域边界点的问题。对于这方面的工作，安德列叶夫斯基研究了边界是拟保角及逐段拟保角变换时的情况。在Padé逼近方面，嘉迪克1979年对一些特殊函数研究了Padé对角线序列的一致收敛问题。1980年，拉哈马诺夫等和罗别斯分别对一般全纯函数或亚纯函数研究了Padé对角线序列的一致收敛问题。

单叶函数论　　复变函数几何理论是一个巨大的论题，它已有半个多世纪的历史，但至今仍富有生命力。特别是在极值点理论，具有拟共形扩张的单叶函数族和单叶函数的系数这三方面，进展尤为突出，而且正在迅速发展中。

1955年，G．斯普林格曾用凸性理论的观点研究过单叶函数族的极值点和闭凸壳，但没有发展起来。自1970年L．布瑞克曼、马克·格雷戈尔和D．R．威尔肯开始，对种种单叶函数族的闭凸壳和极值点的研究兴盛起来。它的理论基础是凸性理论中的Krein-Milman定理和Choquet定理。在某些实例中，极值点的完全特征已被发现，而且由此导出线性极值问题的简捷的解。

设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$是在$|z|<1$内近于凸的函数．Y．Leung

1979年用 Lebedv–Milin 不等式证明：若$f(z)$是$|z|<1$内近于凸的函数，则对一切n和m，M.S.诺伯特松（1970）猜想成立：

$$\big|n|a_n|-m|a_m|\big|\leqslant|n^2-m^2|$$

具有拟共形扩张的单叶函数族研究引起人们的特别注意。在这些研究中，一个主要工具是1959年由中国数学家夏道行首先提出。1966年由美国数学家M.谢否发展起来的变分方法。后来的许多工作都是基于这种或那种形式的变分方法。

夏道行和龚升在五十年代就对映像偏差中的点对向量的偏差和对称函数的向量偏差、S中函数$f(z)$的最初几个系数、函数族S中函数的系数问题、S中整数系数的函数$f(z)$、凸像函数与星像函数以及平均单叶函数等方面分别作出了有重要价值的结果，改进或发展或统一了苏联著名数学家戈鲁辛的一系列结果。夏道行证实了戈鲁辛的两个猜想，利用变分建立了拟共形映照函数的参数表示式，得到一些有用的不等式和被称为“夏道行出数”的一些性质。他在函数论方面的成就，获1982年全国自然科学四等奖。夏道行现为中国科学院学部委员。

七十年代末，何成奇将夏道行建立的拟共形映照函数的参数表示法，拓广到S_K(表示将复平面C照成C的K-拟共形映照$f(z)$的全体，且在$\Delta=\{z|\ |z|<1\}$内$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\in S$)和$\Sigma_K$(表示将$C$照成的$K$-拟共形映照的全体，且在$|z|>1$内$\zeta(z)=z+b_1\zeta^{-1}+b_2\zeta^{-2}+\cdots\in\Sigma$)函数族上。

研究具有拟共形扩张的单叶函数族的第二种有力工具是由勒托（O. Lehto）1974—1977年建立的方法，它依赖于考察经过适当标准化的平面拟共形映照$z\mapsto f(z,\ w)$，f是解析地依赖于复参数ω的，即f的复偏差$\mu(z,f)=f_{\bar z}/f_z$，几乎对所有的z是ω的一个全纯函数，将经典的函数论方法应用于$z\mapsto f(z,\ w)$则导致一个一般的优胜原理，从而导出种种结果。

第三种有力工具是面积原理，这个方法是1973—1974年由苏联数学家B.Я.古特雅斯基等建立的，它是单叶解析函数论中最重要的原理之一——面积原理在具有拟共形扩张的单叶函数族上的拓广。

1974年，L. V. 阿尔福斯证明了存在拟共形扩张的充分条件：若 $f\in S$，且对某复数c，$|c|\leqslant k<1$，

$$(A)\qquad \left|(1-|z|^2)\frac{zf''(z)}{f(z)}-c|z|^2\right|\leqslant k,\ z\in\Delta$$

或 $$(B)\qquad \left|(1-|z|^2)^2\{f;\ z\}-2c(1-c)z^{-2}\right|\leqslant 2k\left|1-c\right|,$$

则存在函数 $F\in S_k$，$K=\frac{1+k}{1-k}$，使得 $F|_\Delta=f$。在(A)的情况下，则$F(\infty)=\infty$。其中，$\{f,\ z\}$表示f在z点的施瓦兹导数。

关于斯普林格（Springer)猜想。设 $\xi(z)=z+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\in\Sigma'$，$z=G(w)=\xi^{-1}(w)=w+B_1w^{-1}+B_2w^{-2}+\cdots$，斯普林格（G. Springer）1951年证明 $|B_3|\leqslant1$，并猜想：$|B_{2k-1}|\leqslant(2k-2)!/k!(k-1)!$ $(k=2,3\cdots)$。极值函数仅限于$\xi(z)=z+\eta z^{-1}$的逆函数，$|\eta|=1$，库波塔(Y.Kubota)1977年证明$k=3,4$和5时上述猜想成立。斯科伯尔（G.Schober）和中国数学家任福尧分别于1977年和1978年证明 $k=6$，7 时猜想成立。1979年，任福尧证明$k=8$时猜想成立。同时，斯科伯尔开展了具有拟共形扩张的单叶亚纯函数的逆函数的系数估计，作为极限情形也证明了$k=8$ 时猜想成立。接着，中国数学家姚壁芸(1982 年)、黄新民(1983年)、肖政初(1983年)、王冠闽、程宝龙、杨双善先后分别证明 $k=9$，10 和 11，12，13，14，15 和16时，斯普林格猜想成立。

我们在前面已经知道，19世纪许多大数学家都对单值化问题作过贡献。特别是具有高度想象力的黎曼面观点，使象代数函数这样的多值函数表示为单值化的曲面上的单值函数的问题获得了

全新的刺激。1907年，德国数学家克伯和法国数学家庞加莱独立地解决了对用自导函数将解析函数单值化问题的一个变量情形，从而使希尔伯特第22问题获得重大突破。1913年，德国数学家韦尔发表《黎曼面的思想》这部划时代著作，对黎曼面做了抽象的刻划，引入了复流形概念。近年来，对黎曼面的模结构的研究取得了重要进展。这方面的工具是1928年德国数学家格罗兹引进的作为保角映射的推广的拟保角映射。而黎曼的保角映射论基本定理的发展，最初是由德国数学家克伯用密切法(1912年)、法国数学家费叶尔和匈牙利数学家F.黎斯应用正规族理论（1922、1923年）作出的。1939年，德国数学家台什缪勒应用极值保角映射观念研究黎曼面的模，二次大战后沿着这条思路取得了巨大进展。到六十年代初，拟保角映射的应用已取得重要结果。

单叶函数理论是保角映射理论的一个重要组成部分。在单位圆内全纯的单叶函数族的理论，发源于克伯1909年给出的与解析函数单值化问题相联系的“畸变定理”，即指确定单叶函数族的泛函，例如$|f(z)|$、$|f'(z)|$，$\arg f'(z)$等的界限的定理。不过，起初的一些结果是定性的。使之定量化的是德国数学家比贝尔巴赫和G．法贝尔等人1916年的工作。以比贝尔巴赫的面积原理为基础，比贝尔巴赫与奈望林纳于1920年建立了单位圆内单叶函数的一个系统理论。比贝尔巴赫还于1916年提出了复变函数几何理论中一个最著名的猜想：

设函数 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 在$|z|<1$中单叶正则，那么$|a_n|\leqslant n$，且使等号成立的极值函数 $f(z)$只限于是克伯函数 $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$及其旋转$e^{i\varphi}k(e^{i\varphi}z)$。

这个关于系数估值的猜想竟成了单叶函数论中一个历史悠久的难题。经过了68年，在许多数学家的努力下，终于在1984年获彻

底解决。

1916年，比贝尔巴赫本人利用面积原理证明了$|a_2|\leqslant 2$。1923年，德国数学家娄浮纳尔（Löwner）利用他创立的含单参数的偏微分方程证明了$|a_3|\leqslant 3$，参数表示法至今仍是研究单叶函数的重要方法，M.谢否等人七十年代还将娄浮纳尔偏微分方程用于控制论研究。

美国数学家P.嘎拉贝第昂和M.谢否用变分法证明了$|a_4|\leqslant 4$。由于证明很难，1960年卡尔兹斯基（Charzynski）和谢否用葛隆斯基（Grunsky）不等式又给出了$|a_4|\leqslant 4$的十分简洁的证明。从此，葛隆斯基不等式受到重视，它几乎成为系数问题研究的出发点，1968年，美国数学家排台尔松和日本数学家屋查瓦独立地用不同方法证明了$|a_6|\leqslant 6$。虽然他们都利用了葛隆斯基不等式，但屋查瓦有更多的计算，他是将Re a_2及a_2的幅角分为多种情形分别讨论而得到结论的。1972年，排台尔松和谢否利用嘎拉贝第昂和谢否不等式证明了$|a_5|\leqslant 5$。证明过程是困难的，以至于10年之久而无进展。

与此同时，许多数学家致力于估计一般系数$|a_n|$的上界，最早的工作是1925年英国数学家利特尔伍德证明$|a_n|<en$，他是由柯西公式导出$|a_n|\leqslant r^{-n}M_1(r, f)$，$M_p(r, f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(rei\theta)\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$，$0<p<\infty$出发，对$M_1(r, f)$进行估计得出的．1933年，中国数学家陈建功证得：若f为k次对称函数，则$n^{(k-2)/k}|a_n|<e^k$,$(n=1,2,\cdots;k=2,3)$。1951年，苏联数学家列别杰夫和米林证明了$|a_n|<\frac{e}{2}n+|5|$。直到1965年，米林才用新方法突破了$\frac{e}{2}$，证明了$|a_n|<1.243n$。1972年，美国数学家

费茨杰拉特证明$|a_n|<1.081n$。1980年，霍尔维茨把它精化改进成$|a_n|<1.0657n$。费茨杰拉特的方法与米林类似，都是将葛隆斯基不等式"指数化"。1984年，中国数学家龚昇和任福尧又改进成$|a_n|<1.0643n$。

另外，许多数学家还致力于第二项系数与其系数关系的研究以及系数的渐近值和有关函数类的系数估计。例如，对前者嘎拉贝第昂、罗思、谢否于1965年证明了n为偶数时，对a_n，有$\varepsilon_n>0$存在，当$|a_n-2|<\varepsilon_n$时$\mathrm{Re}\{a_n\}\leqslant n$成立；1967年意大利数学家明比利证明了$n$为奇数时也成立。

1984年4月，比贝尔巴赫猜想获彻底证明。这个单叶函数论的中心问题之一，是美国普陀（Purdue）大学教授L.勃朗日经过多年努力才解决的，而且还一举解决了与比贝尔巴赫猜想有关的7个猜想。勃朗日实际上是证明1971年发表的米林猜想：设$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$在单位圆内单叶且解析，且$\log\frac{f(z)}{z}=2\sum_{n=1}^{\infty}r_n z^n$，则$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|r_k|^2-\frac{1}{k}\right)\leqslant 0$，$n=1, 2, \cdots$米林猜想是在一些十分精细的铺垫工作（如Robestson猜想、葛隆斯基不等式系和米林早期关于$|a_n|\leqslant 1.243n$的工作）基础上提出的，因为它包括了比贝尔巴赫猜想，所以比贝尔巴赫猜想也就获得了证明，而要想直接证明比贝尔巴赫猜想是不可能的。勃朗日证明的正确性使数学家们极度震惊，而更惊人的奇迹还在于：勃朗日的证明极其简短，并且根本不依赖于复分析学。这项成果被列为1984年世界十大科技进展之首，被誉为"20世纪数学史上的重大事件"和"杰出成就"。这个猜想是流体力学、温度场、电场、磁场等许多工程和物理领域的重要工具，因而对它的解决具有十分重要的意义。在它的背景下产生和发展起来的新方法、新技巧如娄浮纳尔理论已得到广泛应用；葛朗斯基不等式推出了几个系数的

估计和解析开拓的表述；谢否等人发展起来的变分技巧已解决了许多问题。勃朗日方法对单叶函数论的研究和发展必将带来深刻的影响。

值得提及的是，勃朗日曾经发表过有一些关键性错误的证明，因而被数学界冷淡了整整三十年！他说："这是一个艰难的历程，我得不到资助，并受到严重的攻击。"他将证明文稿至少寄给了十二位数学家，但美国数学界很不信任他。最后，苏联列宁格勒大学米林教授等著名数学家主持的几何函数论讨论班才首先确认了勃朗日工作的正确性。米林和勃朗日令人感慨的灵感创造，深刻地说明：数学的进展有赖于洞察力的积累。

这种深刻的洞察力还体现于美国数学家查理斯·弗费曼1971年发现了哈代空间与有界平均振动函数空间 BMO 之间的对偶关系。如果在单位圆内的全纯函数在单位圆周上可积，则这些函数组成"哈代空间"。1961年，有人发现了 BMO。但这两种空间之间的关系却未曾被人认识。费弗曼出人意料的发现，当然是一项突出的成就。

(3) 多复变函数论的发展

多复变量解析函数理论同时附属于分析和几何，这种双重性使它格外引人注目。因而20世纪以来获得丰硕成果。黎曼、维尔斯特拉斯时代只有庞加莱、科津片断的研究，庞加莱1907年证明了C^2中单连通域双圆柱和超球互不同构，从而揭开了多复变函数论域的分类理论的序幕。多复变解析函数理论正式形成于1906年哈托格斯的一系列工作。继后勒维（Levi）于1911年将其结果推广到亚纯函数情形，引进了伪凸性，留下了"勒维问题"即伪凸域是否为全纯域的问题。雷因哈特1921年开创了解析自同构的研究，由希腊血统的德国数学家卡拉热沃多利和本克等人继承。1922年，波克内尔和贝尔格曼引进核函数，产生了许多著名

结果。法都还作出了与单复变量情形的小毕卡尔定理相反的例子，从而说明了多复变与单复变的小毕卡尔定理有完全不同的性质，也说明了多复变函数的值分布与单复变函数的值分布有本质的区别。在奈望林纳给出他的著名的第一、第二基本定理之后不久，阿尔福斯和西米祖（T.Shimizu）1929年给出一个有几何意义的特征函数$T_0(r)$，它与奈望林纳的特征函数$T(r)$仅差一个常数。$T_0(r)$在多复变函数的值分布论中起了重要的作用。法国数学家居里亚1926年的多复变量解析函数的正规族，法国数学家H.嘉当1930年的解析映射唯一性定理，H.嘉当一瑟伦1932年由全纯凸性刻划全纯域等，都是最著名的结果。1936年，日本数学家冈的一系列研究，带来了当时尚未解决的三大问题——科津问题、近似问题、勒维问题的全盘决定性解决。1935年，H.嘉当在C^2中域的分类理论方面证明了有界域的最大自同构群G为有限维实李变换群，域中任一点P，点P的迷向子群H_P为G的紧子群。1936年，H.嘉当的父亲E.嘉当给出了齐性有界域分类的第一个结果——对称有界域的分类，除了两个例外域外，解决了实现问题（两个例外域的实现是M.埃瑟1969年给出的)。E.嘉当在1936年还提出了一个著名的猜想：C^n中具有不变体积元素，其伴随Kaehler度量正定，则同构于对称有界域（从1936年到1959年间，关于分类理论没有任何进展，原因是人们希望给出嘉当猜想的肯定证明。1959年，普雅特斯基（Pjatetzki）和夏皮罗在$n=4$，5时给出嘉当猜想的反例)。1944年，H.嘉当关于解析函数的理想的研究连同冈的具有不定域的理想的研究，发展成解析凝聚层理论。德国数学家本克一斯坦因1951年引进了解析空间概念，导致了近年来多复变量解析函数论的繁荣。法国数学家塞尔和H.嘉当于五十年代初有效地应用了层系数的上同调理论，同时还引入斯坦因流形的概念，第一次在多复变函数论和代数几何学这两个看来无关的学科之间建立起了密切的联系。哥隆特从1955年开始

进行的深入研究（例如(1)所有解析覆盖空间是C覆盖空间；(2)由正常解析映射φ：$X\to Y$作出的X上的解析凝聚层的各次直接象是凝聚的；(3)关于不可约的K完备的解析空间X是可数个紧集的并；(4)全纯凸解析空间的等价条件等）与雷麦尔特、斯坦因的工作一起，大大发展了多复变函数论特别是解析空间理论。中国数学家华罗庚、德国数学家西格尔从四十年代起开展的工作，使多复变量自守函数论的研究得到发展。

施瓦兹引理的研究一直是多复变函数论中一个十分活跃的领域。由于施瓦兹引理是单复变最深刻、最基本的定理之一，具有广泛的应用，它深刻地反映了全纯映射的度量性质与曲率的关系，因此有不少人努力把它推广到多复变数（有的人从距离缩小，有的人从体积缩小等角度来研究，这两者在多复变数中通常是不等价的）。自1926年卡拉热沃多利在C^n的有界域中引进"卡拉热沃多利度量"和1930年H. 嘉当证明了在原点体积是缩小的之后，中国数学家陆启铿1957年、日本数学家小林1967年分别把施瓦兹引理推广到典型域情形。陆启铿的工作是传颂一时的突破，小林还在复流形F上引进了距离缩小的"小林伪度量"。1966年丁格拉斯(Dinglas)、1968年美籍中国数学家陈省身最先把单复变中施瓦兹引理最重要的推广——阿尔福斯的结果推广到多复变数情形，他们证明：若B^n是单位超球，F是埃尔米特—爱因斯坦流形，其标量曲率$\leqslant -2n(n+1)$，则对任一解析映照f：$B^n\to F$是体积缩小的。美籍中国数学家丘成桐1975年证明了更一般的情形。把施瓦兹引理推广到实的情形，由克尔曼(Kierman)、乔库西玛（Jokushima）于1971年首开先河。前者考虑了黎曼面的K拟共形映照的施瓦兹引理，后者将它推广到实n维黎曼流形的调和K拟共形映照。接着，陈省身与哥德贝格（Goldberg）1975年研究了在一定条件下调和映照是体积缩小，后者还讨论了在什么条件下调和K拟共映照是体积缩小。到目前为止最一般的施瓦兹

引理，是陆启铿1979年，丘成桐1978年给出的。陆启铿取得的重要进展是：对有界域而言，他利用全纯映射共变导数的估值得到了高阶情况的施瓦兹引理。由于这种推广采用内蕴的方法，因而深刻地反映了贝尔格曼度量的曲率性质。另一方面，丘成桐证明了以下形式的施瓦兹引理：设f：$M\to N$是完备凯勒流形到埃尔米特流形的全纯映射，如M的Ricci曲率有下界$R_1<0$，N的双截曲率有上界$C_2<0$，则$f^*dS_N^2\leqslant\frac{R_1}{C_2}dS_M^2$、陆启铿与郑绍远、陈志华合作得到了与丘成桐结果互为补充的结果：如M的全纯曲率有下界$k_1<0$，同时其黎曼截曲率也有下界，N的全纯截曲率有上界$k_2<0$，则$f^*dS_N^2\leqslant\frac{k_1}{k_2}dS_M^2$。

研究多复变函数论的值分布理论，首先希望得到类似于单复变中奈望林纳第一、第二基本定理的结果。直到1960年陈省身才第一个得到多复变数的第一基本定理。他的要点在于设法表示出奇异链$f(B_r)$与点A的相交数$n(r,\ A)$。1968—1969年，美籍中国数学家伍鸿熙推广了陈的结果，证明非积分的第一基本定理在更广的范围存在。1972年卡尔森(J. Carlson)、1973年格里菲斯(P. Griffith)对以C^n到P^n的全纯映射的第二基本定理作了较成功的尝试，得到了全纯映射的亏量公式。

有界齐性域的分类的基本理论是普雅特茨基—夏皮罗（Пятецкий-шапиро）奠定的。他们在60年代引进西格尔域的概念并证明任一有界齐性域均解析同构于齐性西格尔域。自1963年以来，主要是日本数学家致力于齐性有界域的分类工作，方法是用维林贝尔格引进的用一类非结合代数的分类来刻划齐性西格尔域的分类，主要作了：寻求齐性西格尔域对称的充要条件，进而作分类；引进拟对称齐性西格尔域的定义，进而作分类；研究若干为了分类需要的性质；计算自共轭锥上齐性西格尔域的自同构

群。中国数学家许以超在维林贝尔格及井第克茵（Gindikin）工作的基础上引进了N-西格尔域的概念，将西格尔域和满足一定条件的矩阵相对应。他于1977年证明了任何齐性西格尔域必线性同构于N-西格尔域，并于1979年计算了N-西格尔域的核函数和柯西核，还给出了N-西格尔域中较简单的方型域的完全分类，其中包括对称典型域、萨特克（Satake）定义的拟对称域及夏皮罗所举的一些例型。许以超还证明，对西格尔域而言，其形式普阿松核满足拉普拉斯方程的充要条件是该域为对称的。而如何对一般的西格尔域构造其真正的并非形式的普阿松核，至今仍是一个未解决的问题。

1986年，对齐性复流形和有界对称域的研究有了新的进展。许以超对具有实约化李群可递作用的齐性凯勒流形作了完全分类，而且对每一类均给出了典型的表示。殷慰萍研究了有界对称域的由方阵$L=T^{-1}(Z,\ \bar{Z})\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_i\partial \bar{Z}_j}\right)$的所有$j$阶主子式之和。$1\leqslant j\leqslant n$所构成的不变微分算子$L_j$，证明对不可约的对称域，$P_j=(P(Z,U))^{1/j}$正好有$L_j(P_j)=0$，而且这是有界对称域的充要条件。殷慰萍还计算了有界对称域的16维与27维的两个例外域的核函数，柯西—舍荀核、普阿松核及贝尔格曼核。殷慰萍讨论了一类命名为V_{I}的非自对偶锥的对偶锥V_{I}上的广义Γ函数与西格尔积分，并用它们来获得第一类型的西格尔域$D(V_{\mathrm{II}})$与$D(V_{\mathrm{II}})$上的柯西核和形式普阿松核。

在1974年费弗曼、陈省身和莫塞尔（Moser）的工作，特是费弗曼的著名论文影响下，拟凸域成为当前国内外学者研究的中心。对于光滑强拟凸域的分类，费弗曼给出了光滑强拟凸域的贝尔格曼核函数（它在分类理论中扮演着重要角色）的渐近展开式$K(Z,\ \bar{Z})=\varphi(Z)^{-(n+1)}F(Z)+[\log\varphi(Z)]G(Z)$。利用这一结果费弗曼解决了一个古老的猜想：一个具有光滑边界

的严格伪凸域（即强拟凸域）到另一个的双全纯同构可以光滑地延拓到边界上，而且是边界之间的CR同构。这个问题经过许多数学家用单复变的方法尝试证明而未成功，这是因为在多复变区域的情形中，两个单连通区域不一定双全纯等价。费弗曼解决此问题依靠了他独创的新方法。这样一来，光滑强拟凸域的边界上的光滑不变量必为此域的解析不变量，从而引起了研究$2n-1$维实光滑强拟凸超曲面的必要性。陈省身和莫塞尔对强拟凸超曲面解析情形当$n>2$时，取得了重大突破。他们从两个不同角度来研究：一是用标准超曲面在全纯映射下的像来逼近已知曲面，特别是用二阶密切来建立已给曲面的标准形；二是在已给曲面上引进一主丛，且构造了一个嘉当联络，证明了陈—莫塞尔定理。1977年，雅可波维茨（H. Jacobowitz）将这两种观点作了统一处理。历史上，$n=2$时强拟凸实解析超曲面的全系局部解析不变量是E·嘉当在1932年求出的。1986年，巴内特(D. E. Barrett)讨论了两个有界域双全纯同构的开拓问题，他证明当D_1，D_2为有界域，P_1、P_2分别是∂D_1与∂D_2上的点，而∂D_1与∂D_2分别在P_1，P_2处光滑。如果F：$\bar{D}_1\to\bar{D}_2$是拓扑同胚，而且F限制在D_1上全纯，F：$\bar{D}_1/\{P_1\}\to\bar{D}_2/\{P_2\}$是微分同胚，则$F$是$\bar{D}_1$到$\bar{D}_2$的微分同胚，如果下列条件之一成立：(1)$D_1$与$D_2$分别在$P_1$与$P_2$处拟凸；(2)$F$和$F^{-1}$都是正幂数Hölder连续；(3)$\partial D_1$与$\partial D_2$分别在$P_1$与$P_2$处解析。巴内特构造了两个具有光滑边界的区域，其内部双全纯同构但其边界之间不CR同构，从而说明了费弗曼关于两个具有光滑边界的强拟凸域的双全纯同构可以延拓到边界上的结果对一般域是不成立的。笛德雷赫（K. Diederich）、赫尔伯特（G. Herbert）和窝沙瓦（T. Ohsawa）对拟凸域的边界加上一致可展的条件而得到了贝尔格曼核函数在边界对角线上奇性估计的下界。可恩（J. J. Kohn）证明如果M是一复流形的相对紧拟凸域且有光滑边界，而且在M的一个邻域中存在有一个强多次调和

函数，则∂b的像是闭的。中国数学家张锦豪证明对具有光滑边界的有界拟凸域，若对Ω的每点(p, q)形式的$\bar{\partial}$-Neumann问题的次椭圆估计均成立，则有$H^q(\bar{\Omega}, u)=0$，$\forall q>0$，这里u表示$\bar{\Omega}$上局部全纯函数的芽层。张锦豪还研究了强拟凸域的解析子簇的延拓问题，通过对解析子簇V的闭包$\bar{V}$的边界上性质的讨论得到一些V可以开拓的条件。关于全纯域的工作，张锦豪证明了S度量完备的域必是全纯域，并举例说明它的逆命题并不成立。在全纯函数的开拓方面，J. M. Trdpreau在1986年得到了有趣的结果，他证明当S是C^n中的C^2超曲面，$z_0 \in S$，若不存在有经过z_0的包含于S内的复超曲面芽，则在z_0附近，S的两侧的全纯函数，至少有一侧可以通过S开拓出去。

一个Stein流形在什么情况下可以双全纯同构于一个有界域？这是研究Stein流形的一个中心问题。E. L. Stout和W. R. Zame 1986年证明Stein流形$\Sigma^7=\{z\in C^8 | \sum_{j=1}^{\infty} z_j^2=1\}$实解析等价于$C^7$的一个域，但它不能全纯等价于$C^7$的一个域。同年，陈志华与杨洪苍证明了具有极点的Hermite流形，当其径向曲率小于$1/4\rho^2$与挠率范数不大于$1/\rho$时，该Hermite流形必为Stein流形，其中ρ为流形上的点到极点的距离。

近年来，多复变函数论的重大成果主要在复几何研究上，长期未决的弗兰克尔猜想由莫瑞（Mori）与美籍华裔数学家肖荫堂、丘成桐于1979年与1980年分别以不同方法解决，进一步的猜想（肖荫堂1983年在华沙世界数学家大会上作题为“复微分几何的最新进展”的一小时报告中提出的猜想之一）则由莫毅明与中国数学家钟家庆获得圆满证明。我们于前已经知道，一维的埃尔米特对称空间就只有复平面、球与单位圆，它们的曲率分别为零、正数和负数。经过许多著名数学家如黎曼、庞加莱、克莱

茵，而最后由克伯（Koebe）完成的单值化定理是：任一黎曼曲面的最高覆叠面必全纯等价于一埃尔米特对称空间。这使得黎曼曲面上的函数论的研究归结为自守函数的研究。自然地，把这个有根本的重要性的定理设法推广到高维复流形M的情形，是多复变函数研究中一个中心的问题。当M的曲率恒为零时，该问题是比较容易的。当M非紧且曲率为非正时，这个问题则极为困难。仅当曲率为负常数时有一些结果。目前研究者的主要兴趣集中在M为紧且曲率为非负的情况。弗兰克尔曾猜测，当M是紧且具正的双截曲率凯勒流形，则必全纯等价于复射影空间（有正常数曲率的紧的埃尔米特对称空间）。肖荫堂、丘成桐证明弗兰克尔猜想的方法主要是利用调和映射的复解析。在负曲率情形下，肖和丘证明了以下的伍鸿熙猜测：截曲率满足$0\geqslant k\geqslant -Ar^{-(2+\varepsilon)}$的非紧单连通凯勒流形必全纯等价于$C^n$。另一重要成果是肖荫堂利用调和映射的复解析性证明了满足一定条件的负曲率的紧凯勒流形的强刚性，即该流形的复结构由其拓扑结构唯一决定，这些流形包括了全部有界对称域的紧商域。证明这一定理的方法是复几何的，比莫斯顿（Mostow）利用李群讨论类似问题的名著大为简化。关于弗兰克尔猜想的进一步猜想是：M的全纯双截曲率非负且里奇曲率为正的紧凯勒流形是否全纯等价于一紧的埃尔米特对称空间。这是椭圆形复流形单值化问题中的重要问题。贝尔格尔（Berger）曾加上条件，M同时是爱因斯坦流形且有正的双截曲率（此时里奇曲率必为正）时，证明了M必等度量同构于射影空间。莫毅明与钟家庆于1984年仅加爱因斯坦条件下完全解决紧的情形，即证明了具非负全纯双截曲率及正里奇曲率的紧的凯勒—爱因斯坦流形必等度量同构于一紧的埃尔米特对称空间。莫毅明获得1985年美国总统年青科学家奖。而钟家庆则连同下面的一项重要工作，荣获1985—1986年度“陈省身数学奖”，他证明了里奇曲率为非负的紧的黎曼流形M的拉普拉斯—贝尔特拉米算子的

第一特征值$\lambda_1 \geq \pi^2/d^2$，其中d是M的直径。我们知道，在流形上的分析研究中，庞加莱不等式$\int |\nabla f|^2 \geq \lambda_1 \int f^2$有重要的意义，其中$\lambda_1$就是第一特征值，即是给与庞加莱不等式最佳的常数，而如果这个常数能用M的几何量来明显的表达，就更为漂亮。这项工作自里赫内罗维茨（1965年）起，经过了契格尔（1970）、丘成桐、帕特尔·李（Peter Li 1980）等的研究，帕特尔·李和钟家庆在1980年证明了$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{2d^2}$，1983年钟家庆与杨洪苍证明了$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{d^2}$，这是最佳估计。此外，钟家庆的工作还涉及典型域调和分析、酉群傅里叶分析以及一般的西格尔域的（在解析自同胚群下）不变微分算子环及其通解等方面。他于80年代初联系微分算子环的零点定理研究了"华（罗庚）算子"；完成了对经典紧致群——旋转群$SO(n)$上的傅里叶级数的阿贝尔求和；给出了一般的有界可递域的不变微分算子环的维数计算公式。

多复变函数论的纯几何方面的研究，现在还十分活跃。例如法国数学家对循环空间理论、应用于紧复空间的分类，以及微观局部分析的发展引导了重新解释与扩充某些复解析几何问题的研究等，作了很多工作。

侧重于分析方面，国际上多复变函数论研究方向80年代以来表现在：(1)法、日、美等国的学者应用60年代中期瑞典数学家霍曼德尔创造的L^2方法以及霍曼德尔——小平邦彦不等式和可以用它们得到的上同调消灭定理来研究微分算子$\bar{\partial}$和$\bar{\partial}_b$的解；而法国、美国、德国的学者研究$\bar{\partial}$和$\bar{\partial}_b$的解，则是在H^s型或C^∞型空间中，对经典解直至边界建立控制函数的方法，法国还运用位势理论方法与概率控制函数方法。(2)苏联、法国、瑞典从事$\bar{\partial}$和$\partial\bar{\partial}$算子的核的精细分析以及H^p函数的零点的研究。美国、法国

还用概率论方法解决精细分析问题，同时还从事卷积方程和谱综合理论研究。(3)多次调和函数的增长性，广义形式、正广义形式和闭广义形式的结构的研究正在法国、瑞典、美国进行，并取得了许多成果。(4)美国、法国正在研究可矫正的广义形式、解析循环和全纯链的边界问题。(5)对C^∞拟凸域上的有界穷竭函数的存在性问题、C^∞拟凸域上的函数代数、端函数、内函数以及对C^∞拟凸域的自同构和Bergmann核的研究，在法、德、美等国进行。(6)法国学者引进了无穷维解析空间，以之作为一种技巧方法来解决复解析几何的形变问题。随后，将复分析中的某些概念和结果如拟凸域、解析集、$\bar{\partial}$的研究、$H(\Omega)$的拓扑等推广到无穷维。

目前，多复变函数论还远未成熟，方法亦未定型。它正与微分几何、李群、微分方程、拓扑学、群表示论以及理论物理等学科相互作用，借助这些学科的概念和方法而不断开辟前进的道路。

（4）华罗庚等对多复变函数论的贡献

最后，有必要专门介绍中国数学家华罗庚在多复变函数论上的杰出贡献。1935年，E．嘉当证明了有界的对称域，除了16维及27维复空间未确定外，其余可分为四大类称为典型域。确切地说，除上述例外情形，任一n维复变数空间的有界对称域必与四类典型域之一或四类典型域中若干个域的拓扑乘积等价。典型域在多复变函数论中的重要性，从某种意义上讲类似于单位圆$|z|<1$于单复变函数（所有对称域都和单位圆等价）。德国数学家西格尔1943年、华罗庚1944年分别系统地研究了典型域。华罗庚证明了典型域的很多基本几何性质，而西格尔在其自守函数论的专著中记述了华罗庚的结果。1953年，华罗庚首创用群表示论方法得出了四类典型域的特征流形和完整正交系，解决了在典型域

内一个多复变函数的正则函数具体而非局部地展成级数的问题，使这些正则正交函数明显地由典型群的不可约表示的元素来表达。他得到了四类典型域的柯西一舍苟（Cauchy-Szegö）核、贝尔格曼核及普阿松核，并求出了柯西积分公式 $f(z)=\int_{s} H(z, \bar{\xi}) f(\xi) \dot{\xi}$. W. 鲁丁指出，直到华罗庚的工作结果出来之前，人们连单位球的柯西核都写不出来。在此基础上，华罗庚与陆启铿于1959年建立起典型域上的调和函数的系统理论，独具特色地解决了调和函数的狄里克雷问题。在此过程中，华罗庚发现了一组具有与调和算子类似性质的微分算子，国际上称“华氏算子”。华罗庚把一些典型群看作典型域的特征流形，从多复变量及群表示论出发，证明了酉群上的傅里叶级数可以阿贝尔求和，开创了关于酉群傅里叶分析的研究。由此出发，已建立起整套的典型群及紧致李群的调和分析。华罗庚的这项工作总结成专著《多复变函数论中的典型域上的调和分析》，荣获国家自然科学一等奖，并受到国际数学界的高度评价，先后被译成俄文、英文出版。它不仅在函数论，而且在李群表示论、微分几何齐性空间、多复变数自守函数论以及偏微分方程、泛函分析等领域都有重要运用。此外，华罗庚还证明了：“有界域的贝尔格曼度量的黎曼曲率不超过2”以及“常曲率的全纯域可映为超球”等定理，这对复几何的研究很有帮助。

华罗庚曾于1946年任闻名世界的美国普林斯顿大学教授，1948年任美国伊利诺斯大学教授。1950年回国后担任国内多种高级学术职务。生前他还是美国科学院国外院士，联邦德国巴伐利亚科学院院士，第三世界科学院院士。法国南锡大学、美国伊利诺斯大学和香港中文大学荣誉博士。1983年，《华罗庚选集》在西德斯普林格出版社出版。1985年6月，华罗庚在日本东京大学作学术报告时因心脏病猝发逝世。他一生留下200多篇学术论文，

10部专著，其中8部被国外翻译出版，有些已列为20世纪数学经典著作。其研究领域涉及数论（Waring问题、指数和、Goldbach问题）、代数、几何、复分析和偏微分方程。他的名字进入美国华盛顿斯密司一宗尼博物馆，并被列为芝加哥科学技术博物馆中当今88个数学伟人之一。

关于酉群傅里叶分析的研究，由于中国数学家龚昇六十年代的一系列工作而大加丰富。龚昇研究了酉群上傅里叶级数的阿贝尔求和、蔡查罗求和、费叶尔（Fejer）求和及各种球求和。1979年，龚昇、钟家庆等将这方面的工作扩展到其它经典的紧致群，龚昇给出了旋转群$SO(n)$上的傅里叶级数部分和的狄里克雷核。在华罗庚工作的基础上，龚昇等系统地建立起三个最重要的典型群及酉群、正交群与酉辛群上的调和分析。而且，龚昇还应用矩阵积分的技巧，系统而深入地讨论了超球、典型域及强拟凸域上的各种再生核的奇异积分理论，并将此理论首次应用于解高维流形上的奇异积分方程，指出了高维奇异积分与一维奇异积分的本质不同之点。在全纯函数的研究方面，龚昇与严志敏1986年证明了对于四类典型域上定义的全纯函数，经过Möbius变换之后，它在原点的幂级数展开式的系数都可以用协变导数表示出来。

陆启铿除了1959年与华罗庚合作发表具有重要价值的《典型域的调和函数论》之外，还在1958年发表《施瓦兹引理及解析不变量》，这是国际上较早地研究多复变函数论施瓦兹引理的工作，并取得了令人称道的重要突破。1966年，陆启铿发表《关于常曲率的Kähler流形》，证明了常曲率的有界域解析等价于单位超球，并提出了有名的“陆启铿猜想”，即一有界域的核函数$K(z, \bar{t})$作为两点的函数是否有零点？核函数没有零点的域称为陆启铿域（L域）。对陆启铿域的有关研究，引起了国际数学界的兴趣，已得到一系列结果。197[illegible]年，陆启铿发表《有界域解析映

照的固有微分的估值》，引进一种固有微分，讨论这些固有微分的估值与施瓦兹引理的关系，从而得到了高阶情况的施瓦兹引理。其方法与结果的深刻性，表明了施瓦兹引理研究又获得重要进展。陆启铿和钟同德还是我国多复变函数论积分表示理论的拓荒者，他们1957年对柯西型积分的边界性质以及Bochner-Martinetti积分表示的研究，导致我国在此领域取得了受到国际数学界好评的丰硕成果。陆启铿还是一名数学物理学家，对物理上规范场与数学上的主纤维丛上的联络的关系作了研究。陆启铿自幼双脚残废，家境贫困，大部分时间失学，大学时半工半读才得以完成学业，但由于他勤奋苦学，终于在数学研究工作中做出了重要的贡献，现为中国科学院学部委员。

Ⅱ. 实变函数论

（1）积分学的革命

微积分诞生之初，主要研究光滑曲线和可导函数。复变函数理论发展起来之后，则更多地考虑解析函数，它不仅象初等函数那样无限次可导，而且能展开成由各阶导数组成的泰勒级数。1872年，德国数学家维尔斯特拉斯在一次讲演中，构造了一个使人大吃一惊的所谓“病态函数”：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(a^n\pi x)$，它处处连续但处处不可导。1875年，法国数学家达布证明，不连续函数也可求定积分，而且不连续点可有无限多个。德国数学家狄里克雷在研究三角级数时，又列举了在无理点上取值0、而在有理点上取值1的极端病态函数——它是黎曼意义下不可积函数的最简单的代表。此外，还有连续函数的级数其和不连续，可求

出其长度但却不符合微积分中弧长定义的曲线，作为可积函数序列的极限为不可积函数——这一切都与函数、导数和积分所期望的性态相矛盾。另一方面，傅里叶级数理论仍未解决函数与级数之间关系的统一性、对称性、完备性。而黎曼积分愈来愈表现出严重缺陷，往往需加一些很强的条件，才能逐项积分或者交换两个无穷积分的次序，对旧积分进行改革确实是很必要的了。

但是，“病态函数”破坏了18世纪古典数学“天堂般的优美”，很快招致了反对之声。法国大数学家庞加莱尤其批评这种理论，他认为逻辑产生了怪物，研究各种离奇性质的“病态函数”只能是对先辈吹毛求疵而已。但是，真理并不因为权威的评判而改变。以法国年轻数学家勒贝格为代表，数学家们为了弄清19世纪发生的上述一系列奇怪发现，发动了一场积分学革命。

1894年，英国数学家斯蒂阶发表独创性论文《连分数的研究》。他为了表示一个解析函数序列的极限，被迫地其实是非常漂亮地引进了一种新的积分“斯蒂阶积分”，第一次扩充了积分概念。

法国数学家波雷尔的学生勒贝格，这位受波雷尔思想熏陶的27岁的天才数学家，试图从最一般的角度出发，对“函数的积分”、“曲线的长度”、“曲面的面积”等概念作出定义，对波雷尔测度进行推广，创建了“勒贝格测度”和“勒贝格积分论”。1902年，他在博士论文《积分，长度和面积》中，首先定义测度，然后定义积分，第一次系统地阐述了关于测度和积分的思想（他这种思想源于波雷尔、约当和皮亚诺）。1904年与1906年，勒贝格发表了他的成名作《关于积分法和原函数研究的讲义》与《论三角级数》。1910年，他又把单重积分的导数推广到多重积分。勒贝格的积分革命，首先从长度概念的扩充入手，他将（来源于直观的数方格子的方法的）确定面积的内填外包法一般化，引出了勒贝格可列可加测度，使人耳目一新。有了点集

的测度后，定义$y=f(x)$的积分时就不是象过去先把自变量x的区间加以重分，而是把y的区间加以重分为有限多小区间。由于x轴上集合的测度已知，这样就可求出积分的上下界，并可使上下界之差任意小，从而确定一定的积分值。勒贝格可测集与勒贝格积分的引入，使在黎曼意义下不可积的函数，在勒贝格意义下变得可积了，这是一个巨大突破。勒贝格积分一出现就用来研究三角级数，紧接着导数的概念也得到推广，微积分学中的牛顿一莱布尼兹公式也得到相应的新结论。一门古典分析的延续学科——实变函数论在勒贝格手中应运而生了。勒贝格的发现替代了19世纪的创造，使傅里叶级数理论产生了新的转折，是对20世纪数学的一个伟大贡献。它不仅是现代分析的基础，而且是泛函分析中不可少的概念。由于有了点集的测度积分概念，数学家的注意力才投入到抽象空间上的测度及拓扑群上的测度的研究上。这对拓扑学、泛函分析、群表示论、概率论都有重大影响。

勒贝格的工作受到了以法国数学家埃尔米特为首的许多数学家的强烈反对，埃尔米特说："我怀着惶恐和厌恶的心情避开不可导函数的这个仍在扩大着的祸害。"因此，勒贝格从发表第一篇论文的1902年起，十年中始终未能在巴黎获得学术职务。当他最终进入巴黎科学院时，已经整整过去了20个年头。到20世纪30年代，勒贝格积分论已成熟，并广泛应用于概率论、谱理论、泛函分析。现今，连工程师们也不得不接触病态函数，谈论抽象积分了。

1907年，富比尼给出扩大用累次积分计算二重积分的函数范围的一个较好结果。1913年，拉东建立了包含斯蒂阶积分和勒贝格积分的"勒贝格一斯蒂阶积分"，这一推广不仅扩大了勒贝格积分所包括的范围，使它统一了n维欧氏空间点集上的不同的积分概念，而且还扩展到象函数空间那样的更普遍的空间。这种更普遍的概念现在在概率论、谱理论、各态历经理论和调和分

析（广义傅里叶分析）中广泛应用。

（2）苏联函数论学派及鲁津猜想

苏联函数论学派对实变函数论的发展作出了巨大贡献。当勒贝格创立积分论而引起西欧诸国争论不休、裹足不前时，苏联学派的创始人叶果洛夫和鲁津（叶果洛夫的学生）却认准了它是一重要发展方向，并致力于进一步的研究。该学派完成了大部分概念的建立，并彻底研究它们之间的基本联系和建立理论的方法。深受勒贝格为首的法国函数论学派影响的鲁津及其学生亚历山大洛夫、乌利松、柯尔莫哥洛夫等在描述集合论的发展上做出了巨大贡献。叶果洛夫、鲁津对可测函数的结构及收敛性研究，得到比勒贝格更为深刻的结果。鲁津1912年证明了全体可测函数的基本性质：任意可测函数只要改变它在任意小测度的集上的数值，就可变成连续函数。这个著名的连续性质（或构造定理）即鲁津C—性质，成为研究可测函数的有力工具。鲁津本人首先用它来解决牛顿—莱布尼兹积分学基本定理——关于导数和原函数之间的关系问题。鲁津使这个问题适用于最一般的函数，并且证明：对任何除去一个零测度集之外处处有限的可测函数，存在几乎处处（即除去一个零测度集之外）以给定的函数为其导数的原函数。同时，他还找到了构造这种原函数的方法。进一步地，他针对一个函数有无穷多个本质不同的原函数而提出了从中分出一个“真正的”——即与所给函数联系最密切的函数的问题，而且弄清了勒贝格积分以及比勒贝格积分更一般的邓若瓦（Denjoy）积分在其它原函数中所具有的独特性质——在其它原函数的图象中，这两种积分的图象具有最小长度。鲁津还证明了对任一可测函数，存在以某种确定方法可和于它的三角级数。他仔细研究了三角级数的收敛性问题，得到了一系列重要定理。他发现了全体可测集所固有的性质——可测集几乎对称地分布于自己的所有点（除

去零测集）的两侧。鲁津这些经典结果，写入了他1915年的博士论文《积分与三角级数》之中，成为莫斯科数学学派日后发展的起点，并成了现代函数论的基础。而关于可测函数的叶果洛夫定理，早已列入任何一本实变函数论的教科书。然而，鲁津及其学派所发展的数学思想和方法比结果本身具有更重大的意义。鲁津草拟的研究大纲决定了函数论多年的发展方向，《积分与三角级数》所提出的问题，成了许多现代研究的源泉。鲁津数学研究方法的特点在于问题提法的一般性和证明的清晰性与几何直观性，从而最大限度地深入到数学问题的本质中以弄清其结构。这些方法后来被鲁津及其学派推广到许多不同的领域，成为莫斯科学派的特色。在《积分与三角级数》之后，鲁津和学生普列瓦达夫（И.И.Привадов）把实变函数论方法运用于复变量问题，对解析函数在定义域边界附近的性质作了一系列研究。鲁津在度量性函数论方面取得开拓性成果而使之成为自己的学生们继续研究的课题之后，他本人则转向描述性函数论研究，直至逝世。度量性函数论是指实变函数论的实用部分：研究函数的积分法、微分法以及把它展成级数等等。描述性函数论指函数论的另一更抽象更困难的分支，即研究一种按照一定方式构造出各种集和函数的工具。这个领域的第一批成果是法国数学家拜尔得到的，他以连续函数为起点，借助于极限过程造出了复杂的B-函数的层次，并描述了它们的某些特性。同时，波雷尔给出了从线段出发获得复杂的B-集合的过程。鲁津大胆推翻了长期以来为人们所接受的错误观点：如果不利用自由选择原理，就不能得到任何别的集合和函数。他和自己的学生苏斯林（М.Я.Суслин）一同发现了比B-集类更广的、可以能行（不用自由选择原理）地作出的新集（A集）来，并找到了十分直观的构造方法，此外，他还发现了更复杂的"射影集"，他对一系列难题，首次提出"原则上不可解"的思想，成为研究射影集的纲领。上述工作，使鲁津及其学

度集上不加规定，于是傅里叶级数的概收敛（即几乎处处收敛）问题便油然而生，引起许多数学家的关注。鲁津猜想就是在这样的历史背景下提出的。当时，人们已经发现有这样的连续函数，它的傅里叶级数在一个零测度的到处稠密的集上发散。1923年，鲁津的学生柯尔莫哥洛夫给出一个反例，找到一个L'可积（不平方可积）的函数，其傅里叶级数几乎处处发散。1936年，波兰青年数学家马辛克维奇（Marcinkiewicz）举出一个L'可积函数，其傅里叶级数的部分和在每一点都有界，但却几乎处处发散。然而这两个函数都不属于$L^p(p>1)$。因此，后来一段时间对鲁津猜想始终存在着肯定与多半否定两种看法。三十年代出现的有名的柯尔莫哥洛夫—塞里维尔斯特诺夫—普里斯纳估计：当$f\in L^2$，则f的傅里叶级数的部分和$S_n(x;f)$几乎处处满足$S_n(x;\ f)=o(\ln n)^{\frac{1}{2}}$。这一结果直到1966年近30年无丝毫改进，因此被认为可能是最好的估计从而使人怀疑鲁津猜想的正确性。在1946年纪念美国普林斯顿大学成立两百周年而举行的国际学术讨论会上，波兰著名数学家齐格蒙德（A. Zygmud)就认为：在三角级数论方面提出的猜想，根据历史经验往往是要失败的。他还指出：连续函数的傅里叶级数是否必定有收敛点都还不清楚。齐格蒙德的看法是倾向于否定的。其后，鲁津猜想一般就改为如下两个方面的问题：

一、能否构造一个连续函数，其傅里叶级数在一个正测度集上发散；

二、是否所有的连续函数的傅里叶级数都概收敛。

这样，这将问题集中到连续函数上，即认为原来的鲁津猜想未必成立。中国数学家陈建功的研究工作始终致力于肯定鲁津猜想，他在1928—1929年间，为傅里叶级数的概收敛和收敛提供了一个基本估计，从而为证实鲁津猜想作出了重要贡献（于后详述）。1966年，瑞典数学家卡尔森（L. Carleson）用完全新颖的

方法证明了鲁津猜想是正确的，得到了傅里叶级数几乎处处收敛的三个重要结果：

（1）若存在$\delta>0$使$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|(\log^{+}|f(x)|)^{1+\delta}dx<\infty$，则几乎处处有$S_n(f,x)=o(\log\log n)$。

（2）若$f\in L^p(0,2\pi)$，$1<p<2$，则几乎处处有$S_n(f,x)=o(\log\log\log n)$。

（3）若$f\in L^2(0,2\pi)$；则$S_n(f,x)$几乎处处收敛。

这是一个重大突破。（2）的估计较之三十年代的估计有一个很大的改进。接着，1967年美国数学家洪特（R.A.Hunt）用卡尔森的方法证明了进一步的结论：对于$L^p(0,2\pi)$（$p>1$）中的函数，鲁津猜想也成立。这样一来，鲁津猜想在$p=1$时有反例，而$p>1$都成立。至此，单元函数的傅里叶展开的点收敛问题已经比较完整地得到了解决。而在此之前，不仅对鲁津猜想正确与否没有决断，还相当普遍地认为傅里叶分析的现有理论尚不足以解决这个问题。到卡尔森和洪特的工作完成后，才发现所用的方法如极大函数的估计、内插定理、希尔伯特变换等，都是已知的结果。问题在于他们对例外集研究得如此深入，超出了一般所能预计的程度。它的深刻性世所公认，此一突破性进展，使奄奄一息的古典分析又进入复兴时期。

（3）多元傅里叶级数

给古典分析带来复兴的还有美国数学家查理斯·费弗曼（C·Fefferman）。自1970年起，费弗曼将洪特、卡尔森等人的结果推广到多变量情形，使多元傅里叶展开的点收敛问题取得了较大进展。1970年，苏联数学家捷夫日德泽（Тевзадзе）证明了在二维情形鲁津猜想对方形收敛成立后，费弗曼和瑞典数学家斯觉林（P.Sjölin）在1971年分别对一般的R^n证明了洪特的结果对方形收敛成立，即

若$f\in L^p(p>1)$，则f的傅里叶级数的方形部分和几乎处处收敛到f。证明方法是从一维的哈特结果出发进行归纳，但需把f的傅里叶级数分解为两部分，分别对应于两个属于L^p的函数的傅里叶展开。解决了方形收敛问题后，费弗曼又给出了限制矩形点收敛问题的否定解答 他证明存在二元连续函数，它的傅里叶级数按限制矩形处处发散。两年后，苏联数学家证明了无限制矩形的点收敛问题亦有相同结果。同时，费弗曼及其他一些数学家还进一步地考虑了比方形和复杂得多的圆形和的L^p收敛问题以及圆形和典型平均问题。为了考察f的傅里叶展开的圆形和的L^p收敛问题，费弗曼引进了强奇异积分算子$T_\lambda^*(f)(x)=\frac{\sin|x|}{|x|^\lambda}*f(x)\quad(0<\lambda<n)$，并证明了强奇异积分算子的一个主要定理："设$1<p<\frac{4n}{3n+1}$，$\lambda p<n$，则$T_\lambda^*$是$L^p(R^n)$的有界算子"。费弗曼对三角级数收敛问题与奇异积分算子这两个互不相关的领域之间意料不到的内在关系的发现，推动了整个领域的大发展。当然，强奇异积分算子本身是从R^n傅里叶变换的问题提出来的，但结果却没有满足傅里叶分析本身的要求，而在偏微分方程理论上显示了十分重要的作用和深远的影响。费弗曼以其在三角级数论、复变函数论以及偏微分方程方面的巨大成就，22岁时就荣获1971年国际撒拉姆奖（奖给世界上在三角级数、抽象调和分析等方面取得最新重要成果的人），1976年又获美国首届华特曼奖（奖给有前途的年轻科学家，每年评一人，奖金15万美元），1978年荣获第九届菲尔兹奖。这个以"神童"、"天才"著称的数学家，22岁时就被聘为芝加哥大学教授，25岁时被聘为普林斯顿大学教授，在美国三百年历史上亦属绝无仅有。

在多重傅里叶级数这个领域里，自70年代以来虽已有了若干重要进展，但仍有很多问题亟待解决，特别是关于确定具有绝对收

敛的傅里叶级数的函数结构，尚未获得完满结果。1974年在加拿大温哥华召开的国际数学家大会上，费弗曼在他一小时的报告中列举了傅里叶分析的近代重要进展之后，指出人们目前对于 R^n 上的傅里叶变换仍然接近于无知。这些本质上的困难，一是属于多重级数本身的，一是由于所用工具如极大函数、希尔伯特变换等在 R^n 上的复杂性。费弗曼还认为傅里叶变换的某些现象足以引起人们这样考虑：运用勒贝格积分理论来研究傅里叶变换是否合适？斯坦因（E.M.Stein）则认为困难与积分曲面的几何性态有关，特别是与曲率有关。

至于傅里叶分析与H^p空间、鞅论、多复变函数及逼近论的结合，在80年代仍然是发展的主要方向。

（4）新的函数空间

近十年来，H^p空间和BMO空间的重要性质逐步显露，成为与勒贝格空间L^p相提并论的空间。其中H^1与BMO最引人注目，处于古典调和分析研究的中心位置，与调和分析的许多其它近代内容发生联系，在许多问题中实际上成了L^1和L^∞的替代空间。

卡尔森测度是H^p-BMO理论中的一个重要概念；卡尔森不等式是涉及到H^p的一个著名不等式：$\mu\in CM_{q/p}$，$0<p\leqslant q$，当且仅当

$$\left(\int_{R_+^2}|F(x,t)|^q d\mu\right)^{1/q}\leqslant C\|F\|_{H^p},\forall F\in H^p$$

这里，$F\in H^p$意指$F(x,t)$是 R_+^2上的解析函数，它满足$\|F\|_{H^p}=\sup\limits_{t>0}\left(\int_R|F(x,t)|^{p}dx\right)^{1/p}<\infty$。

中国数学家邓东皋1984年对卡尔森不等式 $p=q=1$ 情形作了推广，得到：

$$\left|\iint_{R_+^2}F(x,t)\ v(x,t)\frac{dydt}{t}\right|\leqslant C\int_R A_r(F)(x)v_{*,r'}(x)dx$$

这里，$F(x,t)$只是R^2_+上波雷尔可测函数，$v(x,t)$是取定的R^2_+上非负波雷尔可测函数。并设

$$A_r(F)(x)=\left(\int_{\Gamma(x)}|F(y,t)|^r t^{-2}dydt\right)^{\frac{1}{r}},\ 1\leqslant r\leqslant\infty.$$

$$v_{*,r'}(x)=\sup_{I\ni x}\left(|I|^{-1}\int_{\hat{I}}|v(y,t)|^{r'}\frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{r'}},$$

$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$。

邓东皋不等式中$r=\infty$，且$v_{*,1}(x)\in L^\infty$时，便得到卡尔森不等式中$p=q=1$的情形。邓东皋还给出了他的不等式的一些应用。

中国数学家韩永生1983年讨论了CM_α当 $\alpha>1$的情况($\alpha=1$以前为人们讨论)：对$\mu\in CM_\alpha$，有$\left(\int_{R^{n+1}_+}|\varphi(x,t)|^\alpha d\mu\right)^{1/\alpha}\leqslant C\int_{R^n}\varphi^*(x)\,dx$，$\forall\varphi$。韩利用这个不等式对 H^p 理论中出现在费弗曼和E·M. 斯坦因的著名论文中的几个重要引理给出了简化证明。

对于与很多领域相关、性质丰富的 BMO 空间，中国数学家王斯雷1981年发现 BMO 派生的一个性质很适合作为傅里叶级数一致收敛的判别条件，他对 $f\in L^1(T)$引进量$\mu(f,h)=\sup_{I:|I|=h}\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|dx$。从而得到：对$f\in C(T)$，由$\mu(f,h)=o\left(\left(\log\frac{1}{h}\right)^{-1}\right)$ 可以推出 f 的傅里叶级数$S(f,x)$一致收敛。王斯雷还研究了利特伍德-佩利ζ函数算子在$BMO(R^n)$上的作用。

在函数的结构块分解方面，泰布内森(M. H. Taibleson)与维斯 (G. Wiss)首先讨论了由结构块生成的空间 C_q，并发现其在傅里叶级数收敛问题中具有良好性质。中国数学家陆善镇于1983年联系R.费弗曼 (R. Fefferman) 的熵概念研究了这种块

结构在高维傅里叶级数的求和、某些奇异积分的收敛等问题中的应用。中国数学家龙瑞麟则发现了$L^p(0<p\leqslant 1)$可以进行更简单的块分解，而且他独立于维斯等人得到了$C_q(1<q<\infty)$的对偶空间刻划。科伊弗曼(R. R. Coifman)、麦叶尔(Y.Meyer)、斯坦因讨论了空间族$T_q^p(1\leqslant q\leqslant\infty,\ 0\leqslant p\leqslant\infty)$中可进行块分解的情形，首先证明了族中最有意义的$T_2^1$是可进行块分解的。韩永生、龙瑞麟较详细地研究了$T_\infty^{p,2}$，对这个子族获得了较为完整的结果，如结构块分解、对偶空间、内插空间、卡尔森不等式等等。而且，他们实际上研究的是更一般的$T_\infty^p(v)$，其中v是R^n上事先给定的满足二倍条件的非负波雷尔测度。

韩永生（1983年）和美、日学者讨论了$p_1\leqslant 1$时用$\|h\|_{H_{p_1}}$代替$\|h\|_{p_1}$来研究一个联系于H_p的函数分解问题，韩对$p_1\leqslant 1<p\leqslant p_2$的情形得到了分解$f=\zeta+h$，使得$\|\zeta\|_{p_2}\leqslant C\lambda^{p_2-p}\|f\|_p^p$，$\|h\|_{H_{p_1}}^{p_1}\leqslant C\lambda^{p_1-p}\|f\|_p^p$，$\forall f\in L^p$。

关于哈代-索伯列夫空间，中国数学家彭立中1983年利用$H^p(R^n)$，$0<p\leqslant 1$的原子-分子理论，研究了分数次积分算子在H^p上的作用，进而定义哈代-索伯列夫空间H_k^p与$\mathscr{L}_s^p$，得到了与古典的索伯列夫空间L_k^p与$\mathscr{L}_s^p$（$1<p<\infty$）相类似的结果，如嵌入定理、等价模定理、对偶定理等。

（5）多线性算子理论与加权理论

多线性算子理论来源于奇异积分的交换子理论。后者是1965年美籍阿根廷学者卡尔德隆（A.P.Calderón）为研究带不光滑系数的微分方程而引进的一个新概念。多线性算子理论与微分方程、复变函数、拟微分算子、非线性分析等都有联系。特别是，它被成功地用来解决关于李普希兹曲线上的柯西积分算子L^2有界

性的著名的卡尔德隆猜想。将多线性算子理论应用于非线性分析，邓东皋与科伊弗曼、麦叶尔合作，1983年在L^{∞}模小的条件下证明了Kato猜想，即Kato算子$\sqrt{-\Delta}/\sqrt{-\nabla(I+B)\nabla}$是$L^2(R^n)$上的有界算子。这里，$\Delta$是拉普拉斯算子，$\nabla$是梯度算子，$I$是$n\times n$单位矩阵，$B=(b_{i,j})$是$n\times n$函数矩阵，满足$\|b_{i,j}\|\leqslant\delta_n$，$\delta_n>0$，$\nabla(I+B)\nabla$表示一强椭圆型微分算子。

在傅里叶分析中出现的哈代-利特伍德极大算子、奇异积分算子、希尔伯特变换等许多算子是$L^p(dx)$到自己的有界算子，早已为人所知。而对什么样的权函数$\omega(x)$仍是$L^p(\omega)$到自己的有界算子问题，却长达几十年未能解决。70年代初，莫肯荷普特(B.Muckenhoupt)的工作取得突破，他发现一个施加于权上的很简单的条件即所谓A_p条件为充分必要条件。此后十多年来，对权函数的性质本身，对各种算子的加权不等式，对加权理论与其领域的联系等的研究，构成了当代傅里叶分析的重要内容之一。国内函数论学者如王斯雷、彭立中等主要研究了利特伍德-佩利型算子、卡尔德隆-齐格蒙特算子等各种各样算子的加权不等式。

（6）利特伍德猜想和卡尔德隆猜想

这两个猜想的解决，是近年来傅里叶分析最令人注目的进展。

1948年，英国著名数学家J.E.利特伍德猜想：对于$\{n_k\}_1^N$的任意选取，$0<n_1<\cdots<n_N$，总有$\left\|\sum_1^N e^{in_kx}\right\|_1\geqslant C\log N$。

1960年前后，科恩（P.J.Cohen）证明了不等式右边可以是$C(\log N/\log\log N)^{1/8}$而首先获得突破。达文泡特(H.Davenport)稍后将$\frac{1}{8}$改进为$\frac{1}{4}$。1978年前后，皮科雷兹（S.K.Pichorides）

和弗尔涅尔（J.J.F.Fournier）分别用不同方法证明不等式右边可以是$C(\log N)^{1/2}$。1980年皮科雷兹因将右边改进为$C\log N/(\log\log N)^2$而获Salem奖。1981年，利特伍德猜想最终被O.C.McGenhee、L.Pigno、B.Smith(独立地，也被S.V.Konjagin)解决。他们的思想是先证明关于H_1的哈代定理的下述推广：

设$S=\{n_1,n_2,\cdots\}\subset Z,\mu\in M(T),\text{supp}\,\hat{\mu}\subset S$,则$\sum\limits_{k=1}^{\infty}K^{-1}|\hat{\mu}(n_k)|\leqslant C\|\mu\|$。利用此定理，取$S=\{n_k\}_1^N$，$\mu=\sum\limits_1^N e^{in_kx}dx$，则得到利特伍德猜想的不等式。

所谓卡尔德隆猜想是美籍阿根廷数学家卡尔德隆(A.P.Calderón) 1978年在赫尔辛基国际数学家大会上正式提出的（它的历史可追溯到1965年）：设K是复平面内的紧集，复值函数$A(x)$满足$\dfrac{A(x)-A(y)}{x-y}\in K$，$\forall$实数$x$，$y$,$x\neq y$，又设$F(z)$在$K$的一个邻域内解析，那么

$$C(f)(x)=P.V.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)\frac{f(y)}{x-y}dy\text{是}L^2\text{上的}$$

有界算子。

卡尔德隆1965年首先研究并完满解决了$F(z)=z$的情形，然后他就提出对应于$F(z)=z^k$，$k\geqslant 2$，算子$f\to C_k(f)$的L^2有界性问题。1974年，科伊弗曼与麦叶尔证明了C_k的L^2有界性。1977年，卡尔德隆在$\|A'\|_\infty$小的条件下，证明了$C(f)$的L^2有界性。1981年，科伊弗曼、蒙克因托西（A.Mcintosh)、麦叶尔用多线性算子理论得到$\|C_k\|\leqslant B_0(1+K)^4\|A'\|_\infty^k$，$\forall K$。从而使$K$凸时的卡尔德隆猜想获证。稍后，达维斯（G.Davis）从卡尔德隆1977年的估计出发，用实方法去掉了K的凸性限制。80年代

前期，上述数学家还将F的全纯性也减弱为C^{∞}性质。

（7）抽象调和分析与实函逼近论

由前所述，傅里叶分析即古典调和分析是关于傅里叶级数或积分的理论（如收敛、求和、局部化原理、唯一性集合等），此外还包含50年代以后，特别是70年代蓬勃发展起来的许多与微分方程等密切相关的新分支，如奇异积分、多线性算子、拟微分算子、新的函数空间、加权理论等。古典调和分析提供了研究古典的群上的函数论的一个强有力手段。所谓抽象调和分析，是指将这个傅里叶分析方法推广到成为研究一般群上的函数论的方法的相应理论，大体分为局部紧交换群、紧群、一般局部紧群、李群及齐性空间上的函数。它与数论、概率论、微分方程、广义函数、巴拿赫代数、自守形式以及群表示论等许多学科有密切的联系。

温德尔（J.G.Wendel）完成了调和分析中最重要的算子——卷积算子在局部紧群 G 上的特征刻划。60年代，伊德沃德（Edward）和赫维特（Hewitt）对卷积算子序列的点态收敛问题证明了：在一般条件下卷积算子序列$\{T_k\}$对某个巴拿赫空间B由所有f都$a.e.$收敛这一事实等价于对所有$f\in B$，极大算子T^*几乎处处满足$T^*f(x)<\infty$。他们还对一些群构造了具体的函数序列，使其对应的卷积算子序列$a.e.$收敛。斯坦因(E.M.Stein)在1961年就对紧群建立了卷积算子序列的极大算子的弱性不等式与这个序列的点态极限存在的等价性。该结果对肯定或否定卷积算子序列的点态极限的存在性是非常关键的。中国数学家龙瑞麟也在很一般的条件下，对一般的局部紧群证明了卷积算子序列$\{T_k\}$在任意巴拿赫空间上的点态表现只能在两种情况下抉择。

关于卷积代数的理想理论的研究，已构成了一个庞大而丰富

的理论，其中最主要的是谱综合问题。"谱综合"名称来源于伯尔宁（A.Beurling）对有界函数的谱综合的开创工作。他得到了一系列结果，例如对非零$\zeta\in L^{\infty}(G)$，证明了$\Sigma(\zeta)$非空。这个结果与古典的维纳（Wiener）的陶伯（Tauber）定理（$\hat{G}$的空子集是一个谱集）等价。谱综合理论问题的研究，自1972年国际调和分析会议把它与群表示论作为两个重点发展对象以来，一直是很活跃的领域，但重大进展似乎还未出现。

在实变函数逼近论方面，自19世纪末维尔斯特拉斯给出"任何有限闭区间上的连续函数都可以用代数多项式逼近到任何预先指定的程度"这个著名的连续函数的多项式可逼近定理后，对周期函数情形，很自然地用三角多项式代替代数多项式。这种逼近理论在20世纪发展很快，特别是伯恩斯坦（Бернштейн）、瓦尔内-卜辛（Vallée-Poussin）等人的工作，使实函逼近论成为一个非常活跃的分支，至80年代仍处于蓬勃发展的状态。

50年代至60年代，中国数学家陈建功、郭竹瑞、孙永生、施咸亮、曹家鼎和苏联数学家叶非莫夫(Ефимов)、济曼(Тиман)、斯杰奇金(С.Б. Стечкин)、巴里（Бари）等对蔡查罗逼近、一般线性逼近、幂级数与黎斯逼近法、逼近系数、从$C_{2\pi}$中的函数看它的共轭函数、插值多项式、$E_n(f)$与$E_n(f^{(r)})$的关系和函数类$W^{(r)}(\alpha)$中函数的最佳逼近获得了许多结果。日本数学家竹内（G. Sunonchi）和中国数学家陈天平对蔡查罗平均的极度逼近(1962)，李训经关于蔡查罗求和法在巴拿赫空间的一个定理使叶章钊对阿贝尔求和的极度逼近（1964)，苏联数学家托列茨基（Турецкий)、中国数学家曹家鼎对一般平均函数的极度逼近，施咸亮对求和法(L_k)与$(L_k^{\frac{1}{k}})$，陈天平对黎斯平均等问题的研究都给出了较好的结果和一些新的方法。

70年代，阿斯科涅卡夫(Осколков)、拉多斯拉瓦瓦（Радославова）对三角多项式逼近函数中在全测度点集上的逼近，阿

斯科涅卡夫、谢庭藩对用傅里叶级数的部分和逼近，勒因德勒尔（L.Leindler）、斯查巴多斯（Szabados）及阿斯科尔科夫（K.I.Oskolkow）对强性逼近，卡勒涅恩舒克（Н.П.Корнейчук）李古恩（А.А. Лигун）、福罗伊特对可微函数类的最佳逼近，等等，取得了值得称道的结果。在代数多项式逼近函数方面，有巴士马科夫（Башмаков）、拉伐里索恩（Рафальсон）和马多勒伊（Моторный）等人关于用代数多项式逼近的阶的研究；有福罗伊特、斯库赫杰（Schöhage）巴特泽尔（Butzer）和斯查巴多斯等人关于具有一定形式的代数多项式的逼近；有福罗伊特关于加权逼近的系统研究；有罗伦兹（G.G.Lorentz）和泽勒尔（K.L.Zeller）关于单调逼近的研究；有巴波夫（В.А.Попов）和别格鲁舍夫（П.П.Пегрушев）以及普拉诺夫（А.П.Бупанов）关于有理逼近的工作。此外，辛格尔（I.Singer）、马斯塔塔（C.Mustăta）加尔金（П.В.Галкин）和克甫（КрооА.В.）对集对于元素的逼近，泰勒（G.D.Taylor）、莱维斯（J.T.Lewis）、帕梭（E.Passow）、雷芒（L.Raymon）和费希尔（S.D.Fisher）对借助于凸子集的逼近等抽象逼近问题的研究，都取得了进展。这里，抽象逼近系指由于理论和实际应用的需要，被逼近的函数不是实变函数，而用来作为逼近的工具也非代数或三角多项式，而是借助于线性赋范空间X的一个子集中的元素来逼近$f\in X$。

（8） 陈建功对实变函数论的贡献

中国现代数学事业的奠基人之一陈建功，是我国许多数学分支的拓荒者和带头人，在国内外数学界享有崇高的威望。他在单叶函数论、拟共形映照论、广义解析函数、正交函数级数论、函数逼近论以及偏微分方程等方面都有十分丰富的研究成果，早在本世纪20年代，当傅里叶分析的主要部分——三角级数论的研

究进入全盛时期之时，他就由于在这方面的卓越成就而誉满东瀛，成为国际上知名的数学家。陈建功早年留学日本，在大学一年级时就写出了富有创造性的论文《无穷乘积的若干定理》(Some theorems on infinite products)，1921年刊载于日本《东北数学杂志》上，是中国数学家中第二个在国外正式发表学术论文的（中国人在国外发表的第一篇现代数学论文是胡明复1918年在美国发表的《线性微分和积分方程》）。这是中国学者进入现代数学研究的先声，“在时间和质量上，都标志着我国现代数学的兴起”（《陈建功先生数学论文选集》序言）。陈建功抓住当代分析数学发展的主流之一——三角级数论，围绕这一主流中的核心问题——鲁津猜想而展开研究工作，从多方面进行探讨，作出了不少重大贡献。1928年，陈建功证明了：定理〔A〕（即若$\Sigma C_n^2(\ln n)^2<\infty$，则$\Sigma C_n\phi_n(x)$概收敛。其中，$\{\phi_n(x)\}$为一般的正交系。1922年由拉德马赫（H. Rademacher）证明。）是与定理〔B〕（即若$\Sigma C_n^2(\ln\ \ln n)^2<\infty$，则$\Sigma C_n\phi(x)$的算术平均概收敛。1925年由缅绍夫（Д. Е. Меньшов，给出）或定理〔C〕（即若$\Sigma C_n^2(\ln\ln n)^2<\infty$，则$\Sigma C_n\phi_n(x)$的部分和$S_n(x)$之子列$S_{2^k}(x)$概收敛。1927年分别由波尔根（S. Borgen）和喀茨马茨（S. Kaczmarz）独立给出）等价的。这种等价性的建立说明了正交函数级数的概收敛问题可以转化为级数的求和以及部分和子列的概收敛问题，从而把相当多的研究内容紧密联系在鲁津猜想这一核心问题上。1929年，陈建功改正了齐格蒙德在关于黎斯典型平均问题的一篇论文中企图否定鲁津猜想的错误结论。同年，他又指出希尔勃（E. Hilb）与沙思（O. Szász）在数学百科全书中确认拉德马赫给出的$\rho_n(x)=O(\sqrt{n}(\ln n)^{(3/2+\epsilon)})$对于$x$几乎处处成立的结果不能再改进的断言是错误的，并给出了新的估计：当$n\to\infty$时，几乎处处有$\rho_n(x)=O(\sqrt{n}(\ln n)^{(1/2+\epsilon)})$，这就为傅里叶级数的概收敛和收敛提供了一个基本估计。

陈建功研究了如何刻划一个函数能用绝对收敛的三角级数来表示——这个为当时世界上许多第一流数学家所致力研究的问题。1928年，他和当代最著名的数学家黎斯（匈牙利）、哈代(Hardy，英国)、利特尔伍德（Littlewood英国),等各自独立地解决了这个问题。他证明了：三角级数绝对收敛的充要条件是该三角级数为杨氏（Young）卷积函数。所谓$f(x)$为杨氏连续函数是指它可以表示为$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\xi)f_2(\xi+x)d\xi$，其中$f_1$和$f_2$都属于$L^2(0,2\pi)$，且以$2\pi$为周期。

在直交函数级数方面，陈建功证明了该级数理论中的两个最基本的求和定理是相互等价的，这个深刻的结果使人们对直交函数级数的求和理论，有了实质性的了解。

1929年，陈建功以杰出的成果获得国际上公认难于夺得的日本理学博士学位，成为在日本取得此荣誉的第一位外国科学家。50年代短短10年间，陈建功在复变函数论研究领域里三次开拓新的方向：单叶函数论、复变函数逼近论、拟似共形映照理论。他在三角级数及正交函数的收敛与求和，实变函数逼近论等方面的研究，一直居前沿阵地。他生前在国内外共发表论文69篇，有9种专著和译作。

第 八 章

现代数学发展概观之四：抽象代数学

Ⅰ．20世纪的抽象代数学

抽象代数学的兴起是20世纪数学最突出的进展之一。它源于19世纪群论的发展。在介绍19世纪代数学发展情况中，我们已经知道伽罗瓦理论为近世代数学的兴起开辟了道路。伽罗瓦群的发现，使代数学的主流进入群论时代，在数学的算术化及公理化构造的潮流中，发展成为本世纪的抽象代数。今天，代数学的研究对象是群、环、域、格等最基本的代数系，其中起基本作用的概念是同态、同构。群的概念不仅扩展到整个数学，而且已应用到物理、化学以及其它领域中去。可以这样说，没有群就不能理解现代数学。抽象代数与拓扑学和泛函分析成为现代数学理论的三大支柱。

（1） 群 论

群论是抽象代数最先发展的一个部门，19世纪由于伽罗瓦和英国数学家凯利等一批杰出数学家的研究，已经有了良好开端。最开始出现的群是变换群，即群是一些变换的集合。比如把一个

等边三角形变换到自身有6种方式：旋转120°，240°，360°（即不动变换）以及对三条高线的反射。这6种变换构成的集合就是群。19世纪研究最多的群是方程根的置换群和晶体群。几何学研究图形的运动群，函数论研究变换群，它们的元素都是具体的变换。群论的研究在20世纪沿着各个不同方向展开。1900年，德国数学家弗洛贝纽斯、伯恩赛德在19世纪的研究基础上把各种群的共同特征抽象出来，以符号来代替具体变换，从而形成抽象群论的研究。伯恩赛德提出过许多著名问题与猜想。例如，1902年他提出：一个群G是有限生成且每个元素都是有限阶的，G是否有限群？此问题至今尚未解决。他还猜想：除了只含素数个元素的循环群外，每一个非交换的有限单群的阶数（含元素个数）都是偶数。直到1963年，美国数学家汤普逊和菲特在《太平洋数学杂志》上以占整整一期篇幅238页的论文《奇数阶群是可解的》证明了伯恩赛德猜想的正确，创造了单篇论文长度的世界纪录。论文表现了奇迹般的思路和运用群论全部经典技巧的熟练性。为此，汤普逊与菲特获得了美国数学会的弗兰克—奈尔逊—柯尔奖（表彰在代数与数论方面有出色研究成果的数学家）。之后，汤普逊的成果不断出现：1966年证明了弗洛贝纽斯猜想；1968年到英国剑桥大学工作后，发表了《论其局部子群皆可解的不可解有限群》的论文，被人称誉为"有限单群理论中最为重要的文献"。在这里，汤普逊独创了许多新的思想和技巧，开拓了一系列新的研究方向。1970年在法国尼斯举行的国际数学家大会上，38岁的汤普逊获第七届菲尔兹奖，从而成为迄今荣获菲尔兹奖的数学家中唯一的代数学家。

20世纪前半叶群论的重大发展是群表示论的研究。群表示论由弗洛贝纽斯1896年创始，它把由具体的变换群变为抽象群的过程反过来，即把抽象群具体实现为变换群，其中最简单的是由矩阵表示群的线性变换群。1901年起弗洛贝纽斯的学生舒尔提出有限

群表示的问题，发展了群表示论，成为有限群论的基础和研究群论的重要工具。1913年法国数学家E·嘉当、1925年德国数学家韦尔完成了对半单纯李代数有限维表示的研究，奠定了李代数表示论的基础。E·嘉当的工作虽然开创了李群与微分几何的研究，但当时并未受到注意，20年之后才发现其重要性。韦尔的结果是很关键的：特征为0的一个代数封闭域上的半单李代数的任何表示都是完全可约的。20年代中期，德国女数学家埃米·诺特以深刻的洞察力把群表示论与理想理论和模论统一起来，从而以独特的方法建立了系统的一般非交换代数理论。她指出群表示论的核心部分——群特征标理论与理想理论有关系，并把老的表示论从复数域直接推广到一般的域上。而表示论中的分裂域可用"代数"的语言来刻划。1941年德国数学家布劳尔创造了模表示论，给群论提供更有力的工具。近30年来，"歇瓦莱群"（包括扭群）的表示理论已经成为从不同角度进行深入研究的对象，并且至今仍是十分活跃的数学领域之一，尚有许多悬而未决的问题。

抽象群论最基本的问题之一就是决定给定阶群的所有互不同构的类型，即对于给定阶群进行完全分类。这种分类问题首先是找出比较简单的、基本的群——单群，然后再把单群组成各种复杂的群。这是一个古老的问题，即使从1878年凯利明确提出这个问题算起，迄今也有一百多年的历史。其间，很多数学家做了大量的工作，在一些方面取得了可观的成果。尤其是有限单群的分类研究，到50年代取得重大突破，1981年已经完全解决。到目前为止已知的单群大致可分为四类：(1)素数阶的循环群；(2)次数≥5的交代群；(3)李型单群；(4)其它零星单群。前两类单群早就搞清楚了。李型单群是法国数学家歇瓦莱1955年的论文"Sur certains groupes simples"首先突破的，他仿照复李群的构造法，在任意域上成功地作出了一批单群。这个方法后来被R.斯泰因贝尔格和B.科斯坦特等人推广，得到一批与复李群类似的

群，这些群统称李型群或歇瓦莱群。第四类单群最初仅有5个马蒂厄群，是马蒂厄在1861～1873年间发现的。现共发现25个零星单群。第6个零星单群“杨科群”是杨科在马蒂厄之后一百年的1966年发现的，其余为以后陆续发现。1980年，英国剑桥大学本森等四人借助电子计算机找到了杨科预言存在的单群$J_4=2^{21}\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot11^3\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot43$(元素数)；而美国密歇根大学的格里斯用手算找到了巨群（魔群）即弗斯切尔预言存在的有限单群$F=2^{46}\cdot3^{20}\cdot5^9\cdot7^6\cdot11^2\cdot13^3\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot41\cdot47\cdot59\cdot71$(元素数)，大约$8\times10^{53}$。由于意大利数学家朋比利最终解决了Ree型群的唯一性问题，美国数学家阿夏切尔认为，除群M的唯一性之外，有限单群分类问题已经解决。对有限单群进行分类的一个基本工具是1971年H.本德尔给出的定理提供的。该定理断言：若一个有限群G有一个强嵌入子群，则下列事实必有一成立：(1)G的2-Sylow子群是循环群或广义四元数群；(2)G具有一个正规列$G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset1$，使$G_0/G_1$与$G_2$为奇数阶的，并且$G_1/G_2=L_2(2^n)$，$U_3(2^n)$或$S_z(2^{2n-1})(n\geqslant2)$。另外，著名的希尔伯特第5问题即“是否每一个局部欧氏群都一定是李群？”于50年代初期得到解决。其间，经过冯·诺伊曼1933年对紧群情形、苏联数学家邦特里雅金1939年对交换群情形、歇瓦莱1941年对可解群情形的工作，于1952年由格利森、蒙哥马利、齐宾共同证明了肯定性结论。而前面述及的菲特和汤普森彻底解决伯恩赛德猜想，则是有限群论中一个极为困难的、最著名最深刻的结果之一。

在李群的离散子群研究方面，苏联数学家格·阿·马古利斯证明了著名的塞尔贝格猜想，从而荣获1978年第九届菲尔兹奖。若G是李群，当子群$\Gamma(\subseteq G)$导出的齐次空间G/Γ具有有限不变测度时，Γ为格子群，它具有“离散”的特点。另外，若群$G\,(G\subsetneq GL(n,R))$与以$n\times n$个整数为元素的矩阵的群$GL(n,Z)$可公度，则G的子群叫G的算术子群。算术群带有“连续”的特点。对于

这种“离散”与“连续”的关系，人们早已知道一个半单李群的算术群都是格子群。那么，相反的情形怎么样呢？1960年在印度孟买召开的国际函数论会议上，著名数学家塞尔贝格和魏依提出了所谓“塞尔贝格猜想”：除某些例外，格子群也都是算术群。1966年苏联数学家皮亚捷茨基和沙皮罗对此猜想作了完善和拓广。一时，这个猜想成为与好几个数学分支有关的难题。经过六年研究，马古利斯证明了非紧致情形下的塞尔贝格猜想。对于紧致的情形，多年致力于此的美国数学家莫斯托夫曾形容它“象一面光溜溜的墙，无从下手”。然而，恰恰是受莫斯托夫1973年的一项工作的启示，马古利斯综合运用代数、分析、数论的近代成果，出色地使紧致情形的塞尔贝格猜想在1974年最终获证。马古利斯曾经受过著名苏联数学家盖尔芳德和西拉伊的严格训练，他的证明被1974年菲尔兹奖获得者、美国数学家曼弗德赞为“惊心动魄的”工作。

在某种意义上正好与单群相对的p-群的分类问题进展却很缓慢。直到1980年，人们利用电子计算机还只完成了p^6和2^7阶群的分类。理论上讲，p-群的分类问题并不困难。因为在p^n阶群中总存在p^{n-1}阶正规子群，于是每个p^n阶群都可看作一个p^{n-1}阶群的p次循环扩张。按照O.斯科雷尔的群扩张理论，若知道了全部的p^{n-1}阶群，那么p^n阶群就不难作出了。但是这里有两个难以克服的困难：一是当n较大时，p^n阶群的种类太多，计算相当复杂，即使借助电子计算机也只能解决n很小的情形。二是如何解决同构问题，它更为困难。历史上，凯利1854年首先完成p阶分类；纳托1882年完成p^2阶分类；1893年，J.W.A.尤昂和O.霍尔德均独立完成了p^3和p^4阶群的分类；p^5阶群的分类工作从1898年开始，经历了多次曲折，直到1964年森里尔与M.哈尔合作并利用P.哈尔1940年提出把p-群分为同倾族的思想才最终完成。对于$p \geqslant 3$，p^6阶群的分类是R.杰姆斯在1969年的博士论文中给出的，

他还同时给出了第一个没有错误的3^5阶群的完全分类。最后，70年代中期E.罗德米赫也是借助电子计算机完成了 2^7 阶群 分类。M.F.牛曼1980年正式宣布有2358种2^7阶群。

有限p-群的发展虽然不象有限单群那样令人瞩目，在此领域里工作的数学家人数也不多，但它自1934年P.哈尔的奠基性论文发表以来的半个世纪里，特别是近 20 年来 有了很大进步。1958年，科斯特涅金（А.И.Кострикин） 对方次数为p的局限伯恩赛德问题给出了肯定的证明；1965年，G.E.瓦尔对 $p=5$ 的情形用反例否定了Hughes猜想；1966年，W.Gaschütz 证明了有限非交换 p-群 具有p幂外自同构；1976年，M.R. 沃海-李证明了关于 p-群 的宽$b(G)$的J.Wiegold 猜想：$|G'|\leqslant p^{\frac{1}{2}b(G)(b(G)+1)}$；J.G.汤普逊和J.阿尔佩瑞等人为研究单群问题而开辟 了 研究p-群的新方向。

（2）域论

抽象代数的另一组成部分是域论。伽罗瓦不仅是群论而且是域论的创始人，只不过他未建立抽象域的观念。伽罗瓦域是一种由有限多个元素构成的域。19世纪除已知有理数域、实数域、复数域、伽罗瓦域之外，还对代数数域和代数函数域进行了深入研究，形成了代数数论和代数函数论两大分支。域的独立的公理系统是狄克森和亨廷顿1903年建立的。1910年，德国数学家施坦尼兹总结了19世纪与20世纪之交的各种代数系统如群论、域论的研究成果，发表《域的代数理论》，对域论进行统一的抽象处理，他提出素域的概念，定义了特征数p 的域，证明了每个域可由其素域经添加而得。施坦尼兹的工作形成抽象域论的基础，也是抽象代数学的重要里程碑。代数数域理论是希尔伯特19世纪末总结的，他提出的一些猜想陆续由奥地利数学家阿廷和日本数学家高木贞治所证明，形成一个完整的体系。例如阿廷1927年接连解决

了两个希尔伯特问题，他基本解决了希尔伯特第 9 问题即在任意域中证明最一般的互反律，对发展类域理论作出了贡献。他引入实域的概念并以实域理论肯定地证明了希尔伯特第17问题即“n个变量的正定有理式可否表示成有理式的平方和”。他本人也曾提出了几个著名的猜想，有的至今尚未解决，有的使数学家为难了几十年。例如，阿廷猜想P-adic数域是C_2域，直到1965年艾柯斯和柯辰运用模型论工具才证明了对任意的整数 $d \geqslant 1$，存在整数 $p_0(d)$，使当 $p > p_0(d)$时，Q_p是$C_2(d)$ 域。阿廷还对环论和赋值论做了开创性的工作。杰出的贡献，使阿廷成为抽象代数学的奠基人之一。高木贞治1920年创立类域论彻底解决了1857年就提出的“克罗内克青春之梦”。高木的成就使日本数学第一次达到世界水平，从而成为日本近代数学的开创者。类域的概念是希尔伯特总结代数数域理论时引进的。高木贞治将类域定义作了推广，并证明代数数域 k 的任何阿贝尔扩张K都可表成为 k 上的类域。类域论已发展为数学诸理论中体系最完美的一种。

（3）环论

环论是抽象代数学中成熟较晚的、但却是最深刻的一部分。环和理想的构造虽然可在19世纪找到，但形成抽象理论却完全在20世纪。英国数学家哈密顿1843年发现的四元数，凯利1845年引进的八元数等超复数，由1870年美国数学家老皮尔斯(B.Peirce)总结并称为“线性结合代数”，这就是结合环理论的前身。1900年德国数学家摩林证明：复数域上维数$\geqslant 2$的单（结合）代数都和复数域上适当阶数的矩阵代数同构。1907年美国数学家魏德伯恩的《论超复数》研究了实际上是环的线性结合代数，从而使这方面的理论和整个抽象代数的课题受到新的推动。魏德伯恩给出了他的结构定理：结合代数分解为幂零代数及半单代数；而半单代数可表示为单代数之和，单代数则可表示为域上某个可除代数

的矩阵代数。为了解决研究可除代数时存在的许多算术上的困难，诺特于1929年引入一般的“交叉积”概念，从而推广了以前的循环代数概念。这些概念对代数数论产生了极其重要的影响。她把类域论（代数数论的重要分支）建立在结合代数的基础上，用交叉积代替循环代数把某些类域论的定理例如主类定理推广到非阿贝尔扩张上面。直到今天，这种所谓非阿贝尔类域论的结果还是很少的。诺特还和德国数学家哈塞(H.Hasse,1898—1979)、布劳尔（R.Brauer 1901—1977）一起证明了长期猜想的“代数主定理”：代数数域上任何有限阶中心单代数都是循环代数，而所有交叉积都是中心代数。那么，中心单代数是否都是交叉积？直到1972年以色列数学家阿米祖尔才举出反例作出否定回答。

诺特的抽象代数的文章是从理想理论开始的。理想这个概念是百年以来代数数论发展的自然结果。德国数学家库莫尔在研究费尔马大定理时，发现某些代数数域里代数整数（即满足整系数代数方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$的根)并不能象有理整数那样唯一地分解为素因子之积。库莫尔为了再建唯一因子分解定理，引进了理想数。代德金看出一个整数是同这个整数的所有倍数的集合一一对应的，他把这个观念不仅推广到代数整数上，而且还推广到理想数上面，这样得到的集合他称之为理想。代德金对代数整数的集合，证明了理想可以唯一分解成素理想的乘积。希尔伯特为了研究不变式，而给出了有重要应用的“希尔伯特基定理”——它断定每个多项式理想具有有限基。诺特将已有的环和理想的许多结果使用公理化方法得到了理想论的一般抽象理论。1921年，她发表经典性论文《环中的理想论》，对抽象环论作了真正的奠基，给出了环和理想的系统化和公理化理论，标志着抽象代数学现代化的开始。诺特把多项式环的理想论包括在一般理想论之中，她证明了美国数学家拉斯克尔（E.Lasker，1868—1941）1905年给出的多项式环理想论能够由希尔伯特基定理推

出。她提出了升链条件，每个理想都满足升链条件的环称诺特环——这是诺特通过对具体环的实例进行考察，抽象出其共同特征所研究的最重要的一类环。诺特环已发展为丰富的理论，特别是推广了多项式环的准素分解定理，即任何理想都可表示成准素理想的交。这是抽象公理方法所取得的首次重大成功。其后，诺特在很一般的条件下证明了希尔伯特的零点定理。1925年，她又用五条公理来刻划一类包含代数整数环在内的环，即后来所谓的代德金环。她证明了对于代德金环，理想唯一分解为素理想的乘积的定理也成立。诺特对环和理想所作的十分深刻的研究，为代数整数的理想论和代数整函数的理想论建立了共同的基础。这一总结性工作在1926年臻于完成，因此抽象代数学形成时间一般定为1926年。此外，诺特还为爱因斯坦的广义相对论给出了一种纯数学的严格方法，提出了统一的数学概念。“诺特定理”已成为相对论、基本粒子物理学的基石之一。这是因为，诺特崭新的抽象思想方法所开创的抽象代数学具有强大的生命力，不仅决定其后代数学的发展，而且促使整个数学“代数化”。

诺特的学生、年轻的荷兰数学家范德瓦尔登所著《近世代数学》于1931年出版，使以群、环、域为中心的抽象代数学成为代数学的核心课题，同时也构成现代数学的基础。范德瓦尔登在德国哥廷根求学时仅22岁，他以几个星期的奋战就得到了“关于算术级数的范德瓦尔登定理”这个绝妙的结果——后来被苏联数学家辛钦誉为数论三颗明珠之一，而且他很快掌握了诺特的思想并加以精辟透彻的解释。《近世代数学》是他根据诺特和阿廷的讲稿，总结了整个诺特学派以及其他数学家的成果而写成的。其研究对象从研究代数方程根的计算与分布进到研究数字、文字和更一般元素的代数运算规律和各种代数结构，这就使代数学发生了质变。它的方法和结果具有一般性，因而渗透于各数学分支。

以诺特、阿廷和范德瓦尔登为代表的德国代数学派对日本代

数学派和法国布尔巴基学派的影响无疑是十分重要的。日本的正田建次郎、末纲恕一、秋月康夫、中山正、东屋五郎、浅野启三、永田雅宜等一大批有国际声誉的数学家都直接继承了诺特的传统，推动了抽象代数学的发展。正田建次郎在20年代到哥廷根从师诺特，他所撰写的日文《抽象代数学》，是继范德瓦尔登之后第一本抽象代数的书。布尔巴基学派——这个由一批杰出的法国青年数学家组成的集体，它的主要成员魏依、迪多内、歇瓦莱等人先后到德国直接受教于诺特、阿廷等大师，获益非浅。他们在第二次世界大战期间将抽象代数方法应用于代数几何学、代数数论等方面，极大地推动了这些学科的发展。从1938年起，布尔巴基学派开始出版数十卷的丛书《数学原本》，用数学结构的新观点对全部现代数学分支给以完备的公理化，其思想基础正是来自诺特及希尔伯特为代表的哥廷根学派。其中的代数部分主要由塞尔完成，而当中关于后来线性代数发展的描述，受范德瓦尔登代数学的影响特别深。布尔巴基学派成员对数学许多学科如代数几何学、代数数论、拓扑学、泛函分析、微分几何、代数群、李群、同调代数等都做出了实质性贡献。歇瓦莱在诺特的思想启迪下，完成了类域论的算术化，后来又建立了李理论与有限群之间的桥梁。H．嘉当、塞尔、爱伦伯格的工作，促使同调代数这门学科诞生。当代大数学家魏依在数学的几乎所有方面都有杰出贡献，而诺特的抽象代数方法则是他锐利的武器。魏依、格罗申第克、塞尔、德利涅等研究代数几何，把几何建立在代数的稳固基石之上，使代数几何学成为交换代数的一个分支。

数十年来，由于不断地提出了许多新问题，出现了许多新学派，研究出许多新方法，致使环论在环的结构、环的分类、环的模表示和环的同调性质（基于模范畴）等理论方面，以及环与代数几何、代数拓扑、代数数论、函数论等学科相联系的应用方面，都取得了很大进展。近年来，随着模论的发展和Morita理

论、挠论、局部化方法以及各种维数等概念和方法的出现并进入环论中，使之大大改变了经典环论的面貌。在环论的研究上，我国目前与世界先进水平尚有不小的差距，但近几年也取得了不少成果。

（4）格　论

1933年，美国数学家G．伯克霍夫在范德瓦尔登的《近世代数学》启发下，开始了格论的研究，并于1938年正式创立了格论。经过许多数学家的努力，格论现已形成数学的一个重要分支，它的概念和思想方法已渗透于数学的其它领域，如代数拓扑学和不分明拓扑学等等。研究格论需以群论、环论作工具。反过来，利用格论的工具，又在群论、环论中寻求具体的格的性质。在一般格论中，具有模律的代德金格理论占有重要位置。

（5）同调代数

同调代数是在格论创立之后，于40至50年代随着拓扑学特别是同调论的发展而形成的一种新的代数方法。简单地说，就是把代数拓扑学的方法应用于代数研究。它建立在范畴与函子的观点上，其特征是处理对象的内部结构和机能结构。代数学中以往进行个别研究的一些问题，由它以统一观点加以拓展，从而形成作为一般体系的领域。代数学的对象如群、环、域、格、同态、同构等，都在同调代数中首先得到应用。同调代数形成之后，立即对抽象代数学以及其它许多分支产生了重要影响。

（6）代数K理论

60年代以来，在拓扑K-理论的基础上，代数学的一个重要分支——代数K理论得到迅速发展。它主要研究环（更一般为某个范畴）上取值于阿贝尔群的一系列函子K_n因而带有某种广义

同调论特色。K理论源于法国数学家格罗申第克对代数几何学的黎曼-罗赫定理研究中所用的K群构造。德国数学家赫采布鲁赫1956年把黎曼-罗赫定理推广到一般代数簇之后，格罗申第克进一步引入了K函子，它是对应于代数簇X上代数向量丛的（类似于上同调的）同构类。1959年，英国数学家阿蒂雅与赫采布鲁赫合作把K函子推广到紧拓扑空间，得到类似于拓扑学上同调群的K群。因此，K理论被称作广义上同调论，60年代初，美国数学家巴斯（H.Bass）创始K理论，他引入了K_1并与马尔士(M.P.Murthy)、米尔诺、塞尔合作对K_0及K_1作了大量研究。1971年美国数学家米尔诺引进了K_2，1972年美国数学家奎伦和其他学者分别从各种不同观点构造了K理论。奎伦把代数归结为拓扑，以非凡的才能对极其复杂困难的高维K理论给出一个同伦的定义，统一了以前所有的零散结果，并且对一些具体的对象计算出具体的结果。这样，代数K理论完成了它的创建工作，并在代数几何学，而后在拓扑学、数论中蓬勃发展，成为当代数学的大热门，它与环论、群表示、型论、代数数论、代数几何等都有密切关系。70年代后，代数K理论渗入到域论中，许多著名数学家如Tate、Quillen、Birch、Borel、Mazur等研究了代数整数环的K_2群与函数和代数数域中的一些不变量的关系，大大丰富了代数K理论。

（7）线性代数

研究线性空间（更一般的是某个环上的模）理论的线性代数，也是一个重要的有广泛应用的代数分支，自50年代以来发展迅速，基本形成一整套系统理论。法国布尔巴基学派的H.嘉当、爱伦伯格，日本代数学派的永田雅宜、秋月康夫、铃木，苏联学派的盖尔芳德、马力茨夫、贾柯勃逊等人进行了很有价值的研究。

Ⅱ. 代数几何学的进展

可以这样认为，自从笛卡尔发明解析几何之后，代数几何学就已问世了。它是关于高维空间中由一组代数方程所确定的点集和从这些点集通过一定的构造方式导出的对象即代数簇（简单的如圆、抛物线、抛物面、球面等）的数学。从观点上说，它是多变量代数函数域的几何理论，通过自守函数、不定方程等和数论深刻地结合起来，从方法上说，则和交换环论及同调代数有密切联系。

19世纪20年代，查斯勒斯（M.Chasles）开始由低次曲线簇来构造代数曲线的研究。这是代数几何学的先声。1857年，黎曼创立黎曼面上的代数函数论，他用双有理变换代替射影变换作为研究的基础，在假定任何代数曲线都能够消解奇点的前提下进行讨论。并得到了最早的绝对不变量——作为黎曼面的示性数的亏格的概念。在黎曼以后，出现了从各个角度出发用非超越方法来重新建立更严密理论的尝试。例如，马克思·诺特试图用几何方法来建立这种理论。他应用克列蒙纳（Cremona）变换证明了任意平面代数曲线都能够双有理地变换为除了二次结点外没有其它奇点的代数曲线，从而巩固了黎曼的基础。并且，他阐明了代数几何学最为重要的中心定理“黎曼-罗赫定理”的基本条件。

19世纪90年代，以卡斯特尔努沃（G. Castelnuovo）、恩里克（F.Enriques）和塞维雷（F. Severi）等人为代表的意大利学派继承了马克思·诺特的传统，发展了代数曲面的代数几何方法。法国数学家庞加莱和毕卡尔则开创了二元代数函数论的研究。以后，莱夫舍茨于1924年对复代数曲面的理论作了深入研究。上述理论，虽不十分严密，但极富启发性。

建立严密而且形式上一般化了的代数曲线理论，归功于采用纯代数方法进行研究的德国学派。代德金和韦伯平行地讨论了单元代数函数域和数论。进一步地，诺特把美国数学家 拉 斯 克 和麦考莱（F. S. Macaully）的形式多项式理想的研究抽 象化。在诺特的影响下，出现了 施 密特（F. K. Schmidt）等人的抽象域上的算术代数几何。1931年，施密特研究有限域上一般的单变量代数函数域，发现了ζ函数的函数方程及其与 黎曼-罗赫定理的关系。1933年，哈塞证明了椭圆函数域的黎曼猜想。任意单变量代数函数域的黎曼猜想的最后证明，是魏依于1941年用代数几何学方法给出的。

30年代，范德瓦尔登在诺特的影响下着手把抽象理想论作为代数几何的新基础。他首先引进了一般点和特定化的概念，严格地定义了射影空间中的相重数，并严格地证明了古 典 的 贝 佐特（Bézout）定理："n维射影空间内的l次r维代 数 簇 M 和m次$n-r$维代数簇N的交点，如果不是无限多个，则必是lm个。" 40年代，抽象代数学和拓扑学进一步发展，法国数学家歇瓦莱发展了德国数学家克鲁尔（W. Krull）创始的局部环的理想论，引 进 了拓扑概念并应用于相交重数问题。魏依和美国哈佛大学数学家查瑞斯基（O. Zariski）的工作，为代数几何学奠定了严格的基石。魏依1946年出版经典名著《代数几何学基础》，把相交理论建立在抽象域的基础上，同时把几何思想引入抽象代数的理论之中。由此，他把哈塞等人开创的单变量代数函数理论的算术化推广到多变量情形。他还根据他的相交理论，在抽象域的情形下重新建立塞维雷的代数对应理论，并用纯代数方法重建古典的阿贝尔簇理论。查瑞斯基在三十年代把克鲁尔的广义赋值论应用到代数几何，特别是双有理交换上，以此奠定代数几何学基础。他对双有理对应的性质和奇点消解问题（黎曼的立足点！)都做出了实质性的贡献。查瑞斯基四篇关于代数簇的论文，荣获美国1944年第五

届科尔（F. N. Cole）代数奖和数论奖；他在代数几何方面的工作，特别是这个领域的代数基础方面的奠基性贡献，荣获美国1981年斯蒂尔奖。

至此，抽象代数方法完全占领了代数几何学的中心位置，使这门学科具有浓厚的代数情调，已没有丝毫几何形象的痕迹。半个世纪来，代数几何学迅猛发展，成为许多数学分支的交汇点，给现代数学带来了一系列的新刺激和新成果。但是，这门艰深的学科甚至使许多大数学家也望而生畏。因此，如果能在代数几何学中取得第一流的成就，那无疑是最伟大的工作。自1966年起，几乎每一届菲尔兹奖获得者中都有因代数几何的成就而驰名的数学家。

1954年第三届菲尔兹奖的得主是日本数学家小平邦彦和法国数学家、布尔巴基学派成员让-皮埃尔·塞尔。在此之前，菲尔兹奖主要由在分析方面做出贡献的数学家夺取。小平邦彦和塞尔首开先河，使菲尔兹奖从此主要授与在代数几何学和拓扑学中有杰出成果的数学家。前者正是由于代数几何学成就而获奖；后者获奖原因是代数拓扑学的工作，但他在获奖之后在代数几何学上同样硕果累累。

小平邦彦在学生时代就受到范德瓦尔登的《近世代数学》、道凌的《代数学》以及冯·诺伊曼的《量子力学的数学基础》和韦尔的《群论和量子力学》等最新思想的熏陶和启发，对几门新兴的数学领域都打下了深厚扎实的基础。非凡的才能使他大学毕业不久就升为副教授。但在1949年去美国之前，小平邦彦在国际数学界尚属无名之辈。他的成名作是关于调和积分的三篇论文，对名噪世界的大数学家韦尔战前的研究工作作了创新，这是小平邦彦在艰苦的战争环境中独自完成的。文章几经辗转从日本送到了在美国的韦尔手中。韦尔非常赞赏，立即邀请小平邦彦赴美国普林斯顿高级研究院工作。小平邦彦到普林斯顿时已年近35岁，

他在短短5年时间里连续发表20多篇高质量论文，得到一系列重要定理。他利用调和积分理论将代数几何学的中心定理——黎曼-罗赫定理由曲线推广到曲面，为后来进一步的推广打下了基础。他还证明了狭义凯勒流形是代数流形，并给出了有名的“小平邦彦消灭定理”。辉煌的成就，使小平邦彦连获殊荣：继1954年获菲尔兹奖后，1957年又获日本学士院的奖赏，同年获日本表彰科学技术、文化艺术等方面的最高荣誉——文化勋章，成为继高木贞治之后第二位获文化勋章的数学家。从1956年起，小平邦彦同斯密塞建立了一套系统的复结构的变形理论，对代数几何学、复解析几何学以及理论物理学都有重要应用。60年代，小平邦彦利用新的代数学、拓扑学工具，在紧致复解析曲面的结构和分类上取得非凡成就。历史上，黎曼曾对代数曲线进行分类，以后，意大利数学家对代数曲面进行过研究，但存在证明不严密的弱点。小平邦彦工作的超人之处在于他把问题归结为极小曲面的分类——先用某个不变量（即小平维数）把曲面分成有理曲面、椭圆曲面、K_3曲面等，然后再细致分类。而对于每一种曲面，都建立一个“极小模型”，这样，由极小曲面经过重复应用二次变换就能得到同类曲面。小平邦彦的工作，开辟了两大新领域，对建立完整而严密的代数曲面理论，作出了最重要的贡献。在荷兰阿姆斯特丹召开的国际数学家大会上，韦尔高度评价小平邦彦和塞尔：“数学界为你们二位所作的工作感到骄傲。它表明数学这棵长满节瘤的老树仍然充满着生机。”

塞尔研究代数几何学和复解析几何学是在1954年获菲尔兹奖之后。在此之前，他的工作领域是代数拓扑学以及同调代数。小平邦彦把黎曼-罗赫定理由代数曲线推广到代数曲面，塞尔则得出了这个定理的高维代数簇表示形式，从这里出发，德国数学家赫采布鲁赫完成了黎曼-罗赫定理在高维代数簇上的表述与证明。1955年，塞尔发表《凝聚代数层》和《代数几何学与解析几何学》

这两篇现代数学的新“经典”文献。首次将法国数学家勒瑞1945年发表的层理论运用于多复变函数论和代数几何学的研究；首次发现代数几何学与解析几何学之间的平行关系，从而在多复变函数论及代数几何学这两个看来无关的学科之间建立了联系。这里的“解析几何”并非笛卡尔的坐标几何，这门学科的研究对象是由解析函数的零点定义的解析簇。70年代，把代数几何学推向高峰的世人注目的“魏依猜想”由法国年轻的数学家德利涅彻底解决，塞尔在其中起了很大的作用，他的思想和技巧对德利涅有重要的影响。塞尔在70年代当选为法国科学院院士，1982年当选为国际数学家联盟执委会副主席。他的十多部著作被译成多种文字出版，被公认为“改变了数学的面貌”、“大大推动了数学的发展”的“当代数学界的一位领袖人物。”

在过去30年中，赫采布鲁赫的名字与拓扑学、代数几何学和整体微分几何学领域里的许多结果联系在一起，而这些结果都标志着重要理论的开端。他除了把黎曼-罗赫定理推广到高维代数簇上之外，其成就还包括：发现微分流形的号差定理；微分流形示性类的完整性定理；复齐性流形的比例性定理和紧致李群齐性空间示性类的一般理论（与法国数学家A. Borel合作）；复K-理论及其谱系列和几何应用（与M. F. Atiyah合作）；通过4维流形理论对戴德金互反定理的“拓扑证明”及微分拓扑与代数数论之间的其它有趣联系；希尔伯特模形式和曲面及其与类数的关系的系统研究。赫采布鲁赫因把拓扑、代数、微分几何以及代数数论结合起来的出色工作而获1987年度Wolf奖。

现在，让我们介绍“魏依猜想”的获证情况。“魏依猜想”是代数几何学的中心问题，它的解决成为近四十年来代数几何学最重大的成就。为此作出卓越贡献的是当今举足轻重的大数学家、布尔巴基学派的亚力山大、格罗申第克和皮埃尔·德利涅。1949年，法国大数学家、布尔巴基学派领袖魏依在为代数几何学奠

定了严格基础之后，进一步发现同一形式的方程在复域上取值决定的复簇的某些拓扑性质(如贝蒂数B_0，B_1，…。这里的B_0表示流形有几个连通的部分，B_1表示流形上不同回路的个数）与该方程在有限域上的解的个数N_p（p为素数）有深刻联系。当时，魏依在有限域上的代数曲线和阿贝尔簇上得出了几个重要结论，并由此提出了对更一般的簇的猜想即“魏依猜想”：对每个素数p，应该有一组复数a_{ij}，使得$N_{p^r}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^i\sum_{i=1}^{B_i}a^r_{ij}$，且$|a_{ij}|=p^{\frac{j}{2}}$。这里，$B_i$是二维曲面的贝蒂数。$N_p$为$n$个整素数代数方程$f_i$（$x$，$y$，…，$w$）$=0$的有限组解数目，$i=1$，…，$n$.而且要求未知整数$x$，$y$，…$w$，使得$f_i$都能被一个固定素数$p$整除。魏依猜想揭示了特征$p$的域上流形理论与古典代数几何之间的深刻联系，因而轰动国际数学界。人们为了解决这个难题，引进许多新的工具，借助了许多分支的成果。直到1965年，格罗申第克才证明了第一式，却未取得最后的成功。更困难的$|a_{ij}|=p^{\frac{j}{2}}$则由德利涅在1974年发表《论魏依猜想》的两篇论文彻底解决。

格罗申第克因在泛函分析上的独创性、深刻性及系统性工作而可与泛函分析的创始人、伟大的波兰数学家巴拿赫媲美。50年代中期，他转而研究代数几何学，为了证明魏依猜想而拟定了庞大的代数几何研究计划，建立了一整套抽象的庞大体系。他的工作为现代抽象代数几何学的扩张及更新创造了条件。可以这样认为：如果说魏依的《代数几何学基础》虽然抽象得连一个图形都没有，但仍还可以使人头脑里想到代数曲线、曲面的形象的话，那么格罗申第克把最后一点“几何形象”的痕迹抹得丝毫无存了。到1970年，他完成了比代数簇远为一般的“概型论”体系的十多卷巨著。“概型”是卡蒂埃1956年提出的，已成为代数几何学的基本概念之一。格罗申第克使用幂零元而把分析中的逐次逼近法

搬了过来，再应用上同调论，得到了包括查瑞斯基主要定理在内的许多结果。在1956年赫采布鲁赫应用层的语言和法国数学家托姆及波莱尔（A.Borel)的拓扑成果，把黎曼-罗赫定理推广到高维复流形之后，格罗申第克又进一步推广到抽象域上，其基本思想成了K理论的基础。他还从函子理论的角度以纤维积的形式推广了簇的直积概念。而概型的纤维积包括了相交理论和簇的特定化理论。格罗申第克虽然未能登上解决魏依猜想的最顶峰，但他所建立的一整套概念和方法却是攻克许多著名猜想和难题的有力武器。德利涅能够最终证明魏依猜想，从中汲取了丰富的营养。因此，德利涅的第一个思想来源就是格罗申第克的研究方向、研究思想和技巧。第二个思想来源，可追溯到30年代英国解析数论学派。1968年德利涅证明了魏依猜想蕴含拉玛努扬猜想，而兰金曾用“平方技巧”证明拉玛努扬猜想，因此德利涅借助了兰金技巧。第三个思想来源，是苏联数学家卡兹坦和马古利斯的一个定理，使他建立起一套新理论。在许多相异分支中调集有用的思想、方法，并融为一炉大加发展，这是德利涅高人一着之处.著名数学家迪多内认为解决魏依猜想“这个巨大的成功并非自身的终结，它是通往一个新的、更加激动人心的未知领域的钥匙。在这个未知领域里充满了各种猜想，其中分析、代数几何及数论掺和在一起，成为一种富有诱惑力的鸡尾酒。”格罗申第克和德利涅的巨大成就，使他们分别获1966年第6届和1978年第9届菲尔兹奖。

1963年，具有上百年历史的复代数簇的奇点解消问题由广中平佑完满解决。这项工作，使这位来自日本的年轻数学家，一跃而为堪称世界代数几何学中心的哈佛大学的学术带头人。广中平佑同时因此荣获1970年第7届菲尔兹奖。所谓奇点解消问题，就是用坐标变换的方法把奇点消去或分解成只有最简单的奇点。代数曲线的奇点可通过双有理变换进行解消早已获证。而对代数曲

面的奇点解消问题，从19世纪末期起，许多数学家就开始了研究，直到20世纪三十年代才由沃克和查瑞斯基完全解决。四十年代，查瑞斯基又用严格的代数方法解决了三维代数簇的奇点解消问题。但对复杂得多的高维情况，却没人啃动。广中平佑在其218页的长篇论文中，运用许多新工具，用多步归纳法终于彻底解决了这个问题。在完成这项巨大工程之后，他又将结果推广到一般的复流形，并对一般奇点理论也做出了十分重要的贡献。

哈佛大学代数几何学的新一代代表人物还有美籍英裔数学家大卫·布赖恩特·曼福德，他是1974年第8届菲尔兹奖得主，主要研究参模理论和代数曲面理论。黎曼曾把保角等价的黎曼面作成一个等价类，用一组参数来表示，如果参数组不同那就表示不等价。黎曼把这种互不等价类称作参模。在代数几何学中，参模是代数簇。曼福德关于参模这个代数簇的整体结构的研究，是本世纪60年代数学研究的前沿，但他却启用了自19世纪末希尔伯特的杰出工作后就几乎无人问津的不变式论并加以创造性发展。在考虑不变式论的几何意义时，他注意到参模问题的“稳定”对象，由此得到一系列新结果。他发展了“环式嵌入”方法，大大简化了“紧化”问题，使参模具有清楚的整体性质。曼福德的工作，奇迹般地使干涸已久的不变式理论又焕发出蓬勃的生机。1965年，他出版《几何不变式论》，从而建立了几何不变式论这门新学科。曼福德除了对代数曲面的分类做出了巨大成绩外，另一重大贡献是在1961年证明代数曲面与代数曲线和高维代数簇有一个不同之处是：代数曲面如有一点具有一个邻域，它在一一连续映射下是实四维空间的一个邻域的象，则这点也具有一个邻域是复二维空间的一个邻域的一一解析映射之下的象。并且，这个结论对其它维数是不成立的。曼福德1961年获博士学位，1967年起任哈佛大学数学系教授。他和广中平佑一起被查瑞斯基称为“哈佛的台柱”。

现在，以抽象代数学为基础的代数几何学内容极其绚丽丰富，在今后二十年中仍将是数学发展的前沿。

Ⅲ. 中国的抽象代数学

早在1933到1934年，年轻的曾炯之在德国哥廷根大学著名数学家诺特指导下研究抽象代数学，以代数函数域上可除代数的成就获博士学位。他的好几项成果被国际数学界称为“曾定理”。例如：在C_1域F上不存在有限次非交换可除代数。如果F_0是代数闭域，则$F=F_0(x)$（单变量有理函数域）是C_1域。“曾定理”被写入多种抽象代数学的教科书。曾炯之还创立了拟代数封闭域的层次论。这是中国最早有关现代代数学方面的论文。

1938年，华罗庚与段学复合作研究了有限群中的p-群。华罗庚引进了p-群的“秩”和“伪基底”的概念，并利用它证明p-群存在着伪基。而借助于伪基和P.Hall计数原理的一个改进形式，他又证明了几个“计数”定理。其中有两个结果分别改进了H.A.米勒尔和A.A.库拉霍夫的定理。段学复研究了p-群中子群个数$\bmod p^3$的情形，还对华罗庚的伪基底定理给了一个新的更简单的证明，这个证明更清楚地揭示了秩α群的幂结构与算术结构之间的联系。

自从哈密顿提出第一个非交换除法代数的例子——四元数之后，除法代数倍受注意。而对无限维代数即体却忽视了。华罗庚却用他具洞察力的直接代数方法证明了该领域中几个令人瞩目的定理：（1）在1949年证明：“体的半自同构或为自同构或为反自同构”，此定理为大数学家阿廷大加赞赏而收入他的著作《几何代数》中。华罗庚还从这个定理推出了体上一维射影几何的基本定理，1950年又将这个定理推广到无零因子的环的半同态上去。

(2)1949年给出定理“体的任一真正规子体必含于其中心之中”的一个直接证明。此定理在文献中被称为嘉当-布劳尔-华定理。相对于H.嘉当使用子体的伽罗瓦扩张的复杂技巧，华罗庚只运用了一个初等恒等式当然既直接又简捷。(3)1950年证明了“如果一个体不是域，那么它的乘法群一定不是阿贝尔群”。

在典型群自同构问题的研究上，华罗庚获得比国内外其它方法更完整的结果。早在1946年他就在其第一篇关于典型群自同构的论文中确定了实辛群的自同构.1948年又确定了特征≠2的任意域上辛群的自同构，这种方法也可用来确定其它类型典型群的自同构。华罗庚的方法解决了法国布尔巴基学派的数学家迪多内留下的未解决的一系列问题。他还和I·雷内一起确定了$GLn(Z)$和$PGLn(Z)$的自同构，这是环上典型群自同构的开创性工作。他把通常的酉群推广到基域不一定可换但有一对合性反自同构的情形，这是对典型群的结构问题所作的贡献。他还运用多复变函数论来证明了群表示论中的阿贝尔求和收敛定理。

60年代以前，段学复、万哲先、严志达对李群李代数的研究，谢邦杰对环论和代数论的研究，曹锡华、张远达、陈重穆对一般群论的研究，王世强对格论的研究、王湘浩对代数数论和有理单纯代数的研究，都取得了有价值的成果。王湘浩在代数结构论、代数K理论、代数群论方面都有重要贡献，他在1948年证明了：代数数域上一个单纯代数的所有正则元素作成的乘法群的换位子群等于代数中所有缩减模为1的元素作成的群。同时给出过去已被证明了的葛伦瓦尔特定理的一个反例，获得了葛伦瓦尔特定理在素数方面的情形和一般情形的正确表述及证明。60年代，万哲先对典型群，严志达对半单李群、李代数和对称空间又取得一些进展。

70年代以来，特别是在80年代，国内代数学研究非常活跃，有限群、典型群、代数群、环论、同调代数等一些原有的方向发

展较快，得到不少好的结果。代数几何、代数K理伦、Kac-Moody李代数等一些新的重要的研究方向有所突破，而且有些方面一开头就取得了非常突出的成绩。

关于有限群研究 国际上在1981年确立了著名的有限单群分类定理之后，许多数学家致力于寻求新的思想方法，以期找到该定理的简化证明。例如对子群的几何结构理论的研究工作，不仅企图简化单群分类定理的证明，而且还用几何的变换群概念把有限单群的分类统一于一类结构中，正象歇瓦莱把有限典型群理论统一于歇瓦莱群中一样。在这里，Tits几何的理论是最重要的工具之一。1984年，李惠陵在北京国际群论会议上做了"几何的2-连通"的报告，给出了确定某一类几何（GAB）的普遍2-覆盖的一种方法，拓广了迪茨（Tits）、坎托尔(Kantor)等人近年的工作。两年后，李惠陵又对具有在全部无序基上可传递的自同构群G的有限维几何格Γ进行了分类刻划。黄建华则在国际群论会议上给出两个散在群HS与Ru的2-局部子群刻划。他还和斯特尔玛契尔（B.Stellmacher）合作研究了散在群的秩2抛物系统。黄建华还运用简化有限单群分类定理的重要工具之一"Amalgam方法"研究了单群分类问题，1986年在全国第二届代数学学术会议上作了"Tits几何、Amalgam方法和有限单群分类定理"的报告。石生明在国际群论会议上给出了给定亏群的块的个数的计算方法，接着他又进一步计算了具有块幂等元e的块中不可约模的个数。这项工作属于有限群的模表示理论，模表示理论在分类定理中具有重要作用，它的进一步发展是局部表示理论，该理论是近年来兴起的有限群论中的一个重要分支，将在分类定理的进一步简化中扮演重要角色。国际上有限群的局部表示理论的研究，以美国的阿尔普瑞（J.L.Alprin)和法国的布罗伊（M.Broué）为代表。近几年来，陈重穆对各种内外Σ-群进行了系统研究，给出有限群G是内F-群的充要条件为

$G/\phi(G)$是极小非F-群，从而把内F-群的讨论归结为极小F-群的讨论。在樊恽给出了极小非F-群的结构之后，陈重穆进一步依此而得出可解内F-群的结构。樊恽引进了弱超可解群，且证明了在有限群情形，弱超可解与超可解是一致的。而对于带极小条件的群G，是弱超可解当且仅当G是局部有限超可解且G的每个p-子群的平方幂是幂零的。他还得到了秩$\leqslant 2$的奇阶n的群的充要条件。在群的元素的阶与群结构的关系上，陈重穆证明了有限单群的阶不是k次幂（$k\geqslant 3$）而是平方数的只有$B_2(p)$。施武杰与德国数学家布南德尔（R.Brandl）合作，证明了元素的阶的集合为{1，2，3，4，5，6，7}的有限群G只有交代群A_7；还完整地刻划了$n\leqslant 8$的所有OCn群（即元素的阶的集合为{1，2，3，…n}的有限群）。施武杰还用群的元素的阶的集合来刻划Mathieu群。张广祥用单群分类定理逐个分析的方法证明了一个长期未解决的猜想：非交换有限单群中不含有自正规化循环子群。国际上，用计算机进行群论研究已成为群论中一个重要方向。国内段学复、王萼芳对与置换群、对称群有关的方面作了研究，在对称群可除性等方面取得了成果。对于“一类单本原群”，王杰完整地刻划了有长为4的次轨道的n次可解单本原群。

关于典型群研究 这方面的工作在我国已有较长的历史和独特的方法（矩阵法）。对于典型群中心问题之一的自同构问题，早在1928年斯克雷尔（O.Schreier）和范德瓦尔登已经解决了域K上PSL（2，K）的自同构。对K是体的群PSL（2，K）自同构，长期来由华罗庚、法国数学家迪多内、万哲先等进行了研究，除了一个较困难的特殊情形外，群PSL（2,K）的自同构都是标准的。1986年、万哲先、任宏硕、吴小龙共同解决了这个余下的问题，从而最终地证明了：对任意$n\geqslant 2$，任意体K，群PSL（n，K）的自同构都是标准的。对于“交换环上GL_3的同构”，李福安和李尊贤定义了环A与R之间的映射系统（φ、α、σ）（满

足相当复杂的条件)，证明了对每个映射系统都可构作从$GL_3(A)$到$GL_3(R)$的同构Φ_α^σ，它在E_3（A）上的限制是到E_3（R）上的同构，而且当$\alpha\neq 1$时，Φ_α^σ不是标准的。还证明了：任一从GL_3（A）到GL_3（R）上的同构都是由Φ_α^σ及$GL_3(R)$的一个标准自同构的合成。李尊贤与美国数学家哈恩（H. Hahn）合作，利用Morita理论研究了不同环上的模的广义U群之间的关系。Morita理论和代数K理论是近年来国际上研究典型群所经常借助的工具。

关于代数群研究 近几年来，国内代数群方面的工作引起了大的国际反响。叶家琛几年来不断地在李型有限群的Cartan不较变量方面做了一系列工作：是他首先算出群$SL(3, p^n)$与$SU(3, p^n)$的第一Cartan不变量，并给出一个令人满意而有趣的公式；他对无穷小群表示的分解模式作出了重要成果。时俭益关于仿射Weyl群胞腔分解的工作在国际上产生了颇大影响，他在这方面的专著已由联邦德国斯普林格出版社作为《数学讲座丛书》之一出版；在仿射Weyl群的符号型方面，他解决了英国数学家嘉顿（R. W. Carten）1983年提出的一个猜想。胞腔分解的研究，于1979年最先由Kazhdan-Lusztig提出，1984年Lusztig解决了秩2仿射Weyl群的胞腔分解，时俭益解决了A_n型的情形。进一步地，杜杰完整地解决了B_3型仿射Weyl群的胞腔分解，并对B_3型证明了Lusztig关于胞腔分解的一系列猜想。王建磐几年前关于代数群的Weyl模张量积Weyl模滤过方面的重要成果曾产生了国际范围的影响。近年来他又在一般上同调、代数群表示理论以及模的循环性与余循环性方面取得了一系列成果。对于后者，他给出了循环性与余循环性的若干等价条件；研究了什么样的群是CC群（循环性等价于余循环性的群）；计算出了群$SL(2, K)$的临界数。

关于李代数研究 1968年，卡克（V. Kac）、莫第(R. Moo-

dy）各自独立地创建了一种无限维的李代数——Kac-Moody李代数。20年来，这个分支蓬勃发展，并在组合论、数论、有限群、拓扑学、微分方程等许多数学分支中日益起着重要作用，特别是它和近代物理中的力学和粒子理论有不少联系，故而引人瞩目。

特征数p的单李代数的分类是一个长期没有解决而为许多数学家关心的问题。近年的一个重要结果是美国数学家魏尔森(R.L.Wilson)最终地解决了限制单p李代数的分类。沈光宇在发现新的单李代数和对单李代数分类方面作出过重要贡献。近年，他又对阶化Cartan型李代数的阶化模作了系统研究，证明了不可约阶化模由其零阶部分完全确定，并给出了阶化模为不可约的准则。进一步，他还证明了中心为零的阶化限制李代数的不可约模都是阶化的。这就把不可约限制模的讨论归结为其零阶部分的讨论，应用于阶化Cartan型李代数，就可把问题归结为典型李代数的模的讨论，从而完全确定并具体构造了W型、S型、H型阶化Cartan型李代数的不可约正、负阶化模、并构作了它们的正负滤过。沈光宇曾经构作过称为Σ型的几类新的单p李代数，它们都属于广义Cartan H型。广义Cartan H型李代数的分类，也是长期未解决的重要问题。现在已知的只有Σ型和Kokoris李代数。1986年，沈光宇确定了Kokoris李代数相关的不变阶化李代数。1987年，费青云确定了Σ型李代数的不变阶化李代数。由于沈、费两者工作是不相同的，因而有可能用不变阶化李代数去解决广义Cartan H型李代数的分类问题。卢才辉研究了仿射李代数的不属于0的某一类可积模，完全确定了这一类不可约模的结构与分类。邱森对李代数的上同调作了系统研究，对Cartan型李代数、Kac-Moody李代数、典型单p李代数、Virasoro李代数等的上同调群作了计算。1987年，邱森与沈光宇合作，系统研究了阶化Cartan型李代数的1阶上同调$H'(L, V)$，对秩为2，3时(除$K(3, m)$一型外）完全确定。

关于环论研究 自从本世纪20年代提出环的极大条件与极小条件以来，环论学家就努力挖掘这两种条件之间的关系，其中有著名的霍芬（Hopking）定理(1939年)、弗赫斯（Fuchs）定理（1960年）以及秋月（Akizuki）定理等。70年代中期，许永华对这个问题给出了包含霍芬定理和秋月定理的另一种充要条件：设R是结合环，N是诣零根，则R对左理想满足极小条件等价于(1)R对左理想满足极大条件；(2)N是R中有限个极大左理想之交的充要条件是有正整K_i，使$K_iN^i \subseteq RN^i$，这里$K_iN^i = \{K_ia | a \in N^i\}, i=1, 2, \cdots, m, N^m=0$。国际数学界把日本著名代数学家H.Tominaga 1976年的结果与许永华的结果结合起来称作许-Tominaga定理。在环的结构理论中，贾柯布森(Jacobson)的本原环理论是一个里程碑，而本原环在各类环中处于很特殊的地位。此后，许多环论学家致力于把本原环理论拓展到更广泛的环类中去，但进展不大。许永华运用独特的方法对此作了系统而深入的研究：他引进v基座概念，建立了v结构定理，从而推广和深化了本原环经典的结构定理。他用双侧模的方法替代通常的有限拓扑方法，引进了规范本原环的概念，把著名的Wedderburn-Artin定理（有限秩）扩展到单纯规范本原环（无限秩）中，并给出了所有规范本原环的结构。继后，许永华运用v基座概念成功地完全确定了一类连续线性变换完全环即v规范完全本原环的结构，并证明它是v可迁的。由此还引进v单环概念，并在适当条件下确定了它的结构，并且把Utim-Faith定理、Lotiff定理等扩展到无限中去。建立伽罗瓦理论是本原环理论中的一个重要课题。许永华研究了除环上的伽罗瓦理论，并建立了线性稠密环之间的一个有限结构定理，由此可导出除环上的有限伽罗瓦理论。许永华还对E·诺特、魏德伯恩—阿廷、贾柯布森等发展起来的根理论和半单纯性理论作了较深入研究。他用严格循环模替代不可约模而定义了拟本原环和拟Jacobson根的概念，得到与贾柯布

森的环结构理论相平行的理论，其中包括著名的稠密性定理。他还引进M-Artin环并研究了它的结构，指出它必是（一种特殊的）拟本原环但未必是本原环。许的工作使拟本原环成为基本环类对象。许还与其学生对本原环和拟本原环证明了正交化定理，依此可得到可数无穷维向量空间的连续线性映射变换完全环的结构。此外，许永华对一个加法交换群定义了一种特殊的乘法而得到一种新的代数系统——"非结合非分配环"，并对之作了大量研究，得到一些与通常结合和非结合环相类似的结果。许永华还研究了Goldie环和Köthe猜想，得到了好的结果。

黄昌龄运用他引进的不同环的伽罗瓦理论等价性概念，成功地建立了含有非零基座本原环的伽罗瓦理论（有限及某些限制性无限的）。

对于环结构理论中的结合环与非结合环问题，谢邦杰与郭元春共同证明了周期环是域的两个充要条件；郭元春和董乃昌分别给出了环可换的若干条件。谢邦杰还对四元数体上的矩阵建立了标准型的理论，对四元数体的行列式也得出了一些重要性质。

刘绍学与蔡英熙研究了局部有限代数，把交错代数、约当代数和李代数在有限维情况下的Wedderburn-МалБцев型的定理推广到某一类局部有限的情形。刘绍学刻划了每一个子代数都是理想的交错代数和约当代数以及每一个非零子代数都包含有非零理想的一般代数。刘绍学还研究了结合环可表成Artin环直和的充要条件以及理想稠密分布的诣零代数和广义哈密顿代数等。对于约当环（特征$\neq 2$时）、交错环和具有Engel条件（对$\forall x, y$，有自然数$n=n(x, y)$，使$xy^n=0$）的李环，刘绍学证明了：若R是上述任一环，且有理想A使A与R/A均局部幂零，则R本身也局部幂零。由此得出，若R是上述三种非结合环中任一种，则R中存在一个最大的局部幂零理想N，它包含R的任何局部幂零理想，且R/N为Levitzki半单的。对于根论（环论的一个重要方

向）中超幂零根的模刻划问题和Kypour下根构造问题的研究，湖南师范大学的工作在国际上得到好的反应。

周伯壎研究了模范畴和张量积$R\otimes S$的整体维数问题（后者由著名同调代数学家爱伦伯格（Eilenberg）等于50年代提出）。姚慕生确定了一类Morita Content $(R, S; U, V; \mu, \tau)$中的R与S的自同构与反自同构，统一了近年来这方面的成果。吴泉水研究了Perfect环上的挠理论，举出一个反例否定了Albu与Nastaseseu的猜想。魏景东系统地讨论了在某一遗传挠理论下相对本原环的结构，推广了Jacobson对偶空间有关定理及Zelmanvwitz等人的结果。

关于代数几何学研究 1986年是我国代数几何学研究的转折点，华东师范大学建立了代数几何研究的据点，并做出了杰出的工作。其中，时年35岁的肖刚的成果最为突出。近两年来，肖刚在难度极大的"一般型代数曲面分类"研究中取得了重大成果，被国外同行专家评价为"显示了杰出才能"。他系统地研究了带亏格2曲线丛的曲面分类问题，对满足不规则性大于基曲线亏格2纤维丛作了完整分类，并解决了两个近年来提出的关于亏格2纤维丛的猜想。他把他的研究成果写成专著《以亏格2的曲线作纤维的曲面》，被联邦德国斯普林格出版社作为"现代数学讲座丛书"之一出版，从而成为这套反映当今世界数学最新成果的丛书中第一个拥有专著的中国学者。1986年，肖刚在Math Ann上发表了《有高典范次数的代数曲面》的论文，证明了当一个一般型曲面的典范映射是有限时，它的次数必然不超过8。1987年，肖刚在正指数单连通曲面这一方向上又作出了重大贡献。在代数几何中，有一个著名的"分水岭猜想"，认为不存在正指数单连通极小曲面，这个猜想直到1984年才被人举出反例而作了否定，但所给反例是零星的。肖刚在《正指数超椭圆曲面的例》这篇论文中用二次覆盖的方法给出了一系列正指数曲面的例子。在肖刚

工作的基础上，陈志杰证明了存在充分大的正数c，对于满足$x>c$及$3.955x+140.2x^{2/3}<y<8.757x-365.7x^{2/3}$的整数$x$与$y$，必存在正指数单连通极小曲面$x$，使得$x$的陈氏不变量满足$x(X)=x$与$C_1^2(X)=y$。从而彻底否定了“分水岭猜想”，这对于研究陈氏不变量性质的曲面地理学具有重大意义。翁林则对几何亏格为零且具有亏格2纤维的一般曲面作了完整的分类，并给出了一簇新的$p_g=q=0$的一般型曲面的例子。张德琪的论文《关于Itake曲面》在代数几何的曲面论方面作出了贡献。

第 九 章

现代数学发展概观之五：微分几何学

Ⅰ．微分几何学的形成和发展

微分几何学诞生于18世纪解析几何、微积分发展之时。在古典意义下，该学科的形成和发展可分为三个方面：一是应用微积分研究欧氏平面曲线问题，这方面的理论由约翰·贝努里的学生豪斯比特在牛顿1671年关于曲率中心和密切圆的工作，约翰·贝努里1691年关于包络的工作，莱布尼兹1692和1694年关于求一簇曲线的包络的普遍方法的工作——基础之上，于1696年编写的《无穷小分析》一书而大体完成。二是应用微积分研究空间曲线问题，由法国数学家克莱洛以《双重曲率曲线的研究》（写于1729年，发表于1731年）首开先河。其后，由欧拉加以发展，他于1736年至1765年把曲线、曲面理论进一步应用于力学之中，建立了扭曲线理论，引进了球面指标线、密切平面等概念和双曲率曲线的一个曲率的标准形式。1826年，柯西发表《无穷小计算在几何上的应用教程》，进一步澄清了空间曲线理论中的许多问题，以现代的观点阐述了曲线的几何理论。塞雷特和弗雷内分别在1851年和1852年给出了求空间曲线的切线、次法线和法线的方

向余弦的导数公式，从而使曲线理论趋于完善。三是应用微积分处理曲面问题，以研究测地线为发端，欧拉于1760年引入主法向截面、主曲率和欧拉定理等重要概念和曲面理论，成为微分几何发展史上的一个里程碑。欧拉还在《论表面可以展平的立体》一书中，开创了可展曲面研究的新方向。1809年，蒙日出版了《分析在几何学上的应用》，把几何与分析的方法联系起来，引入了曲面曲率线概念，发展了偏微分方程中特殊曲面的理论，成为微分几何研究的革新者。4年之后，他的学生杜邦在《几何学的发展》中给出了杜邦指标线等重要理论。

从上述领域的研究，发展到曲面的内蕴几何学这一崭新思想的产生，其间经历了一个多世纪的时间。1827年，高斯发表了里程碑论文《曲面的一般研究》，用与蒙日完全不同的方法处理论题，他引入了一系列新的概念和理论，由此奠定了近代形式曲面论的基础，即以二次微分形式为基本工具对二维的局部微分几何作了极其重要的奠基，并提出了一张曲面本身就可视作一个"空间"和曲面的内蕴几何的重要思想。高斯用曲线坐标取代三维笛卡尔坐标，证明了曲面在一点的总曲率仅依赖于曲面上两点间的无穷小距离平方ds^2，而与把曲面嵌入三维欧氏空间R^3的方式(即在R^3中保持第一基本形式的变形）无关。这个被高斯本人也称作"惊人的"发现，建立了曲面的第一基本式所奠定的几何，并把欧氏几何推广到曲面上"弯曲"的几何——曲面的内蕴几何学，从而终于使微分几何学作为一门独立的学科正式诞生。

在高斯的曲面内蕴几何的启示下，黎曼于1854年在哥廷根大学历史性的就职演讲《论几何学的基本假设》中，运用张量分析作工具把高斯的工作推广到任意维数的空间，并概括地建立起所谓黎曼几何的初始概念。他把空间看成多维的拓扑流形，度量则是借助于一个二次微分齐式定义于这种流形之上。黎曼几何是在几何学发展中提出的三种新思想（非欧几何可能存在的思想、曲

面的内蕴几何的思想和任意维空间的思想）的综合和推广的基础上形成的，它不仅包括欧氏几何和非欧几何作为其特例，而且对进入20世纪以来的空间概念和几何思想给予不可估量的巨大而深远的影响。黎曼的演讲直到1868年即他逝世后两年才发表，很快就刺激许多数学家如贝尔特拉米、克里斯托菲、里奇、李普希兹等去充实黎曼所开创的思想，并处理和拓展他的新几何。他们的论文都发表在1870年左右，贝尔特拉米发现所谓伪球面的那种曲面上的几何与非欧几何有密切的关系；受代数的不变式论的影响，克里斯托菲、里奇等人把黎曼几何当作二次微分形式的不变式论进行了研究。克里斯托菲把 ds^2 推广成一般的形式 $\sum_{ij}\zeta_{ij}dx_i dx_j$，研究在局部坐标变换之下，两个$ds^2$是如何互相变幻的，还引入了能够对向量场进行微分（协变微分法）的"克里斯托菲符号 $\Gamma_{jk}{}^{i}$"。克里斯托菲是一位开拓的大师，他对意大利数学家毕安基和里奇有深刻的影响。前者是于1894年第一个使用"微分几何"这一术语的数学家，后者是张量分析的始祖。

张量分析是讨论微分几何的一般方法，它用共变微分表示各种几何量和微分算子性质，可看作是微分流形上的"微分法"。它实际上是与黎曼几何相联系的微分不变量研究的一种新方法。1887—1896年，意大利巴勒摩大学教授里奇致力于为几何性质和物理规律的表示寻找一种在坐标变换下的不变形式的研究，引入了张量概念，还在克里斯托菲公式的启发下定义张量的一般运算（协变微分或绝对微分法）。以此工具对黎曼几何的对象黎曼流形也可以定义类似于高斯曲率的东西，不过这时曲率不是一个数量，而是黎曼—克里斯托菲曲率张量。普通欧氏空间，处处曲率为零；非欧双曲几何研究曲率小于零的常曲率空间；非欧椭圆几何研究曲率大于零的常曲率空间；而黎曼流形中的常曲率，则要满足曲率张量处处相等的条件。1901年，里奇和他的学生勒维、

契维塔合写了一篇总结性文章《绝对微分法及其应用》，系统地建立了张量分析技术，并指出这些与坐标选取无关的量在数学和物理问题中肯定具有价值。1916年，爱因斯坦将张量分析作为理想的数学工具应用于广义相对论，反过来又激发人们对黎曼几何及张量分析的兴趣，从而极大地推动了微分几何学的发展，由此而导致勒维一契维塔1917年对张量分析进行第一个革新，他引入用无穷小向量以无穷小步长作平行位移所带来的变化来描述空间曲率的平行位移的概念，使黎曼空间具有明显的几何意义而易于被理解。同时，平行位移导致几何中联络概念的发端。张量分析作为研究流形上的几何与分析的重要工具，至60年代已有了进一步发展。当然，由于它的基本观点是利用局部坐标的切矢量作标架，因而这个约束弊多利少，但它具有简单明了的优点，在初等问题中，其功用是不可磨灭的。

讨论微分几何所采用的另一种一般方法是活动标架法，为法国数学家达布、科吞（Cotten）和意大利数学家塞萨诺所创。活动标架的概念起源于力学，当物体作刚体运动时，固定其上的正交标架随着运动，得到一族依赖于时间的正交标架，这族标架完全刻划了物体的刚体运动。达布、科吞把单参数标架族的概念推广到依赖多个参数的情形。活动标架法与外微分相结合，已成为微分几何学的有力工具，而且与李群论、拓扑学、微分形式论，尤其是近年来显著发展的数学分支，都有密切联系。法国大数学家E. 嘉当曾于1934年利用活动标架法作工具构成了在他的意义下的一般联络理论，以较高的观点融合了黎曼和F.克莱茵的两种思想，对现代微分几何产生了深刻的影响。

我们知道，F. 克莱茵的思想体现于1872年《爱尔兰根纲领》——在爱尔兰根大学发表的题为《近代几何研究的比较评述》这篇著名演讲文章之中。他把几何学的对象定为连续簇变换的某一个群的不变量，视变换群的选择而有欧氏几何、非欧几何、

射影几何、仿射几何等等。这些空间内的支流形的研究，导致克莱茵空间（齐性空间）中子流形的微分几何学，包括射影微分几何、仿射微分几何和保形微分几何在20世纪前三十年的大发展。其中，射影微分几何研究的领袖人物是美国数学家维尔茨恩斯基(E. J. Wilczynski)和意大利数学家富比尼（G. Fubini),中国数学家苏步青作过重要贡献；仿射微分几何与保形微分几何的决定性工作当推德国著名数学家布拉须盖(W. Blaschke)；美国数学家维布伦（O. Veblen）在发展广义仿射微分几何和射影微分几何方面起了重要作用。他1927年发表的《二次微分形式的不变量》，对黎曼几何学的基本性质作了精确而系统的论述，他还将黎曼度量的知识推广到更一般的情况，并给出了微分流形的一个明确的定义。不过，E. 嘉当的研究则是20世纪之初微分几何最重要的工作，他用自己独创的 ω-方法，重建了各种微分几何。

从关于连续群的博士论文开始，E. 嘉当的工作涉及连续群理论、代数、微分方程与微分几何理论等众多领域。早在广义相对论诞生（1916年）之前，E. 嘉当就产生了局部一样但整体不同的空间思想。1934年，他正式引入联络的概念，在他建立的广义空间中作为主要的几何观念。嘉当联络不仅能够对两个无穷近点的两个切空间的向量进行比较，而且还可以定义一个向量场关于另一个向量场的导数（它对后来的微分拓扑学和理论物理中的规范场理论都提供了重要工具)。“在E.嘉当的工作中也可以找到纤维空间的起源”，但是，“他的最基本的贡献是外微分计算的应用和李群整体理论的阐明”[注]，这两项工作成为近代微分几何的两大柱石。E. 嘉当是法国在19世纪末到20世纪前半叶中不以经典分析为主要专业的数学家，他对微分几何及李群论的研究至

[注] 陈省身：《微分几何的过去和未来》，1970年在国际数学家大会上的报告.

今影响不衰。正是这两方面的杰出成就，使得他曾荣获罗巴切夫斯基国际奖和巴黎科学院的多次嘉奖。E．嘉当的工作由于其深度、广度和巨大的创造性而越来越被认为是微分几何发展史上的转折点，其深远意义至今尚未充分发掘。

1941年，法国数学家埃瑞斯曼把含有纤维空间思想的E．嘉当联络理论发展成一般的纤维丛理论。他不仅正式提出了纤维丛概念，而且细致地研究了纤维丛的一些基本性质。早在1936年，斯蒂弗（E．Stiefel）在研究以微分流形的每一点为原点的有限个线性独立向量场时，就引入了流形的微分同胚不变量。1937年，美国数学家惠特尼把流形及以其上每一点为原点的线性独立的切向量组全体总括在一起而得到纤维丛概念。何为纤维丛？众所周知，二维曲面在每一点有一个切平面，推广到N维流形M，在每一点就有一个切空间。把适当的拓扑引入以全体切空间构成的集合，就得到一个拓扑空间E，叫做以M为底流形的切丛。如果流形M每一点附加的图形不是切空间，而是一个更一般的K维拓扑空间F，满足一些限制条件，就得到更一般的丛，叫做纤维丛，F称为纤维。纤维丛实质上是被称为坐标丛的空间按某种等价关系划分成的等价类。纤维丛和汇束是20世纪三、四十年代所发现的两种重要的几何对象。纤维丛这个属于微分几何及拓扑学范围的一个复杂而抽象的数学概念，有着广泛的实际背景。例如，仿射联络、黎曼联络、射影联络、保形联络等各种几何，都是流形上切丛所构成的纤维丛上的特殊联络。它们都是嘉当联络的典型例子。除切丛之外，纤维丛理论还用于李群、齐性空间、覆盖空间及一般的向量丛等许多领域。

从现代数学的观点来看，作为黎曼几何、联络几何的空间就是微分流形。但在黎曼时代，由于李群和代数拓扑尚未发展起来，因而黎曼几何只限于小范围的理论，即只关心给定图形或空间一点处的任意小邻域都能确定的对象。包括E．嘉当在内的关于联

络几何的研究，都是小范围的。而研究空间或流形的整个性质，特别是局部性质与整体性质的关系——的整体（或大范围、大处）微分几何在20世纪之初，尚处于摇篮时期，除了少数孤立结果（例如，瑞士著名数学家霍甫1925年开始对黎曼空间的微分几何结构与拓扑结构的关系进行的研究，德国著名数学家布拉须盖对卵形线、面的微分几何的研究，以及关于测地线和极小曲面的研究等）外，它一直在等待着微分流形概念的确立以及李群的大范围理论和代数拓扑学为它铺平道路。1941年霍杰(W. V. D. Hodge）开辟了调和积分论，1944年陈省身用内蕴方法证明了高维高斯—彭纳（Gauss-Bonnet）公式，他们都是把黎曼几何作为具有非退化二次微分形式的微分流形的理论来讨论的。

高斯—彭纳公式是微分几何中揭示局部性质与整体性质之间相互关系的一个有名的范例。这个19世纪经典微分几何中的公式揭示了三维欧氏空间的曲面M的总曲率等于它的欧拉示性数的2π倍。即

$$\int_M K(P)dA=2\pi X(M)$$

其中，$K(P)$是曲面M在P点的曲率，dA为面积元，$X(M)$为欧拉示性数。该公式把整体不变量$X(M)$表示成局部不变量的积分，因而很可能是局部与整体性质之间最重要和最令人满意的关系。那么，能否将这个公式推广到高维流形呢？以深刻性和创造性而对数学的发展产生了超越课题本身的影响，并使其后几十年大部分数学研究带上了他的思想印记的霍甫虽曾做过一些基本工作，但他认为“这是微分几何的最基本和困难的问题”。1939年，法国数学家魏依在芬兰遇见荣获1936年首届菲尔兹数学奖的美籍芬兰数学家阿尔福斯（L. Ahlfors)，阿尔福斯向魏依提出挑战：如果魏依能证明高维的高斯—彭纳公式，那么阿尔福斯就可以把单复变函数论中的奈望林纳值分布理论推广到多复变函数上去。

1941年1月，魏依到美国与阿伦道弗（Allendorfer）合作把曲面上的高斯—彭纳公式推广到任意维黎曼流形上，但证明不是内蕴的，且冗长难懂。而阿尔福斯的推广至今未能作出，因为实际工作比他想象的要困难得多。1943年8月，在射影微分几何、积分几何上卓有成就的中国数学家陈省身，应韦尔之邀到美国普林斯顿高等研究院作访问研究，见到了魏依和阿伦道弗的论文。他仅用两个月的时间，就以自己独创的新方法，第一次借助内在的丛，即切向丛理论，完成了高斯—彭纳公式的内蕴证明，成为整体微分几何的经典定理，并被人们誉为现代微分几何的出发点。陈省身这篇题为《对闭黎曼流形高斯—彭纳公式的一个简单的内蕴证明》的论文，于1944年发表在美国最著名的《数学年鉴》上。此时，陈省身就已洞察到纤维丛内蕴概念在整体几何中的重要性。由此，开创了许多新的发展方向。将高斯—彭纳公式和代数几何学中的黎曼—罗赫定理推广到一般流形的杰出工作，归功于英国数学家阿蒂雅和美国数学家辛格尔，他们在1963年共同合作给出了著名的“阿蒂雅—辛格尔指标定理”（见“现代数学发展概观之二：微分方程论）。

由高斯—彭纳公式，陈省身导入了他关于示性类的研究。40年代初，人们对示性类还了解不多。1945年，陈省身发现复流形上有反映复结构特征的不变量（后来被命名为陈省身示性类，简称陈类），以《埃尔米特流形的示性类》为题，发表在《数学年鉴》上。陈省身示性类是微分几何学、代数几何学、复解析几何学、拓扑学中最常见、最重要的不变量，是研究复矢丛拓扑性质的有力工具。陈省身使示性类的概念得到彻底改观，建立了代数拓扑与微分几何的联系。这个划时代的贡献，极大地推动了整体几何学的发展。

1946年初，美国数学会简报第52卷卷首发表了陈省身一篇长达30页的论文《大范围微分几何的某些新观点》。在这篇重要文

章中，陈省身揭示了E．嘉当的联络的几何思想与纤维丛理论有密切的联系，从而把微分几何进一步推进到大范围情形。1950年夏，陈省身以《纤维丛的微分几何》为题，应邀在第十一届国际数学家大会上作一小时报告，使纤维丛理论成为严谨而成熟的数学理论。陈省身、埃瑞斯曼及美国数学家斯蒂洛德（N．E．Steenrod）被公认为纤维丛理论的创始人。

陈省身的研究深刻而宽广，遍及射影微分几何、欧氏微分几何、几何结构及其内蕴联络、积分几何、示性类、值分布论和高维复流形之间的全纯映射的几何研究、极小子流形、网络几何(Webs)等方面，留下了许多精湛的原理、概念、方法和结构，对现代数学产生了十分深远的影响，“可让后人做几十年，成百年”。即使是他最早期的工作，也影响了继往开来的一代人。

法国布尔巴基学派领袖、当代大数学家魏依精当地评价了陈省身的历史地位，称赞他“开辟了微分几何学的新纪元”，指出：“假如没有E．嘉当、海因茨·霍甫、陈省身和另外几个人的几何构想，本世纪的数学是不可能有它的惊人进展的，我相信未来的数学进展还要靠他们这样的数学工作者。”1983年，陈省身荣获美国数学会斯蒂尔奖，评语指出：“半个世纪以来，他是微分几何方面的领袖人物，他的工作既深刻又漂亮”。第二年，陈省身又获1983—1984年度国际Wolf奖，以表彰“他在整体微分几何上的卓越贡献，其影响遍及整个数学”。

近半个世纪以来，微分几何取得了长足的进展，已成为数学的一大分支。由庞加莱(1905年）和伯克霍夫(G．D．Birkhoff，1927年）创始的变分理论，经过美国数学家莫尔斯（M．Morse）1934年的著名工作而发展为“莫尔斯理论”，即大范围变分法，自60年代以来被进一步推广和精密化，并应用于微分几何学、微分拓扑学而得到多项重要结果。同时，微分几何与代数几何及多复变函数论的联系亦日益增长，因而对微分流形上的复结构、殆

复结构等的研究也盛行起来，美籍华人陈省身、周炜良，日本数学家小平邦彦等名家都取得了丰硕的成果。最著名的经典结果有：关于紧复流形的“周炜良—小平定理”和“周（炜良）定理”，关于解析凝聚层的“塞尔定理”，小平邦彦对复结构变形理论的系统工作以及对紧致复解析曲面的结构和分类的工作。

现代微分几何的研究，除了继续保持以研究大范围性质为主的特征外，偏微分方程理论在微分几何中得到深刻应用，而且微分几何与理论物理进一步沟通，如纤维丛与规范场、旋量分析与引力幅射等。物理学所应用的微分几何，虽然多属局部的性质，但在近年来已呈现出大范围的趋势。

在以非线性偏微分方程求解几何问题这个传统领域中创造出奇迹的，是年轻的美籍华裔数学家丘成桐（Sheng-Tung Yau）。丘成桐于1978年彻底解决了“卡那比猜想”，接着又漂亮地解决了微分几何学、代数几何学、复解析几何学直至广义相对论中的一系列重大问题。“卡那比猜想”是美国数学家卡那比在50年代初提出的关于给定里奇曲率求黎曼度量问题，意思是对于紧致凯勒流形、一维陈省身示性类可用里奇曲率形式来表示；反之，若某一闭（1，1）形式表示一维陈省身示性类，则一定存在一个凯勒流形，它的里奇曲率就是闭（1，1）形式。这是一个归结为高度非线性偏微分方程的存在性的难题，二十多年间进展缓慢。丘成桐娴熟地运用先验估计等技巧，十分漂亮证明了卡那比猜想，并促使一大批同类方程得到解决。这个猜想的一个特例是三维复射影空间中的任意四次非奇异代数曲面都具有凯勒—爱因斯坦度量。关于丘的度量，除了它的存在以外迄今知之极少。丘成桐又和他的学生薛恩一起综合运用微分几何学和非线性偏微分方程的方法、技巧，特别是使用了极小曲面方程，成功地证明了广义相对论中的正质量猜想——一个非常困难的大范围微分几何问题：某一质量的引力效应并不局限于该质量所在位置附近的时—空曲

率来表示，原则上也可以在宇宙边缘处发现。他将这套方法用在代数几何及多复变函数等方面，证明了高维闵可夫斯基问题解的正则性并利用解复的蒙日一安培方程证明了“塞梵利猜想”：复射影平面的复结构是唯一的。还证明了在很大一类的紧致复流形上存在爱因斯坦度量。他十分巧妙地将道格拉斯关于极小曲面的工作和美国数学家威廉·瑟斯顿所使用的三维流形的几何拓扑方法融于一炉，从极小曲面入手解决了史密斯猜想。他还同肖荫堂合作证明了弗兰克尔猜想：完备的、单连通的、具有正的全纯截面曲率的凯勒流形双全纯等价于一个复射影空间。

丘成桐是陈省身的弟子，他有十分突出的数学才能，22岁时（1971年）就取得博士学位，28岁晋升纽约州立大学和斯坦福大学教授，现任普林斯顿高等研究院高级教授。他的方法的独创性、深刻性及应用的广泛性和影响力震动了国际数学界。1981年，丘成桐获美国维布伦奖。1983年获第十届菲尔兹奖。

黎曼流形间的调和映照是测地线（最短线）、调和函数、极小曲面的一个自然推广，它的中心问题是证明调和映照的存在性定理及其奇性集的结构。薛恩和沃伦伯克对极小化的调和映照的奇性集维数估计等进行研究，所得到的结果包含了前人的一系列存在定理和正则性定理。

葛罗莫乌等人对黎曼流形的拓扑性质和几何性质的研究是一个引人注目的方向。这一研究得到了非负曲率的黎曼流形的贝蒂数的界限等结果，使黎曼流形的拓扑性质和曲率的关系逐步明朗。

微分几何在规范场中的应用问题吸引了一些著名数学家的兴趣，出现了许多新课题，中心问题之一是求解“Yang-Mills(杨振宁一米尔斯）方程”，这是流形上的一个非线性偏微分方程组。“Yang-Mills理论”即所谓“非阿贝尔规范场理论”，是粒子物理学极重要的理论，它引出了一系列数学问题。1978年阿蒂

雅、赫尔岑和辛格尔应用指标定理证明了四维球面上规范群为$SU(2)$的不可约自对偶规范场依赖于$\delta K-3$的个数(K为邦德里雅金示性数)。其后有不少数学家把微分几何用于杨—米尔斯场，取得了许多好的结果。现已证明了四维球及某些更广泛流形上局部稳定的杨—米尔斯场必定是自对偶的。还证明了具有有限作用量的杨—米尔斯场的孤立奇点必可去等等。而莫尔斯理论、特维斯托尔理论的发展又促进了杨—米尔斯场的研究。

Ⅱ. 微分几何学在中国

中国微分几何学的成长与发展可划分为三个阶段：1931～1945年为第一阶段，这是中国自然科学发展史上最困难的时期。但是，中国数学家在抗日战争的艰难条件下，开创了中国现代数学事业的光辉篇章，微分几何学研究在苏步青、陈省身的带动下，奠定了良好基础。1946～1965年为第二阶段，是微分几何学在中国的成熟发展阶段。这一时期，研究领域扩大到一般空间（黎曼空间、Finsler空间、Cartan空间、K展空间等）微分几何学。同时，在李群、齐性空间、无限连续群的几何学等方面获得了相当多的成果。1966年至今为第三阶段，除去十年动乱，从1976年以后，我国微分几何学进入复兴时期。这个阶段，局部微分几何的研究有所发展，但中心已转向大范围微分几何。

20年代，孙光远（1899～1979）在美国芝加哥大学兰恩（E. P. Lane）教授指导下研究射影微分几何，发表了几篇论文。1931～1933年，陈省身在孙光远指导下，开始从事射影微分几何的研究。1934年，陈省身去德国汉堡，跟随汉堡几何学派的领袖、著名数学家布拉须盖搞积分几何学，对嘉当—凯勒流形理论等作了较深入的探讨。获科学博士后，1936～1937年，在法国巴

黎受业于E.嘉当，主攻整体微分几何学。陈省身对现代微分几何学的卓越建树，在前已作了介绍。

被推崇为我国数学界一代宗师的苏步青，20年代留学日本，1927年毕业于日本东北大学后在窪田忠彦指导下研究由布拉须盖提倡、创新而发展起来的卵形线和卵形面理论。1931年获理学博士学位，是继陈建功之后第二个获得日本国家理学博士的中国人。苏步青以射影曲线理论的贡献为主，在射影曲面理论上也多有建树。他的学术活动大致可分为五个阶段：第一阶段（1926～1930），主要从事仿射微分几何，曾连续发表论文30余篇；第二阶段（1930～1940），重点研究射影微分几何；第三阶段（1940～1950）转入以一般空间微分几何为重点；第四阶段（1950～1966），主攻射影共轭网理论；第五阶段（1966～　）以平面和普通空间参数样条的贴合和光顺为主要研究对象的计算几何学理论的开辟。从1931年起，苏步青就创造性地开拓了新的研究领域，在国际数学界声誉鹊起。他当时的研究方向是仿射微分几何学的几何结构理论，与苏斯（W. Süss）同时独立地，从仿射铸面的立场发现了仿射旋转面，并确立了仿射微分几何学与射影微分几何学间的关系。1937年，苏步青研究直线汇的构图（T），发现了目前正在流行着的所谓Sine—Gordon方程。1938年，他扩张了平面曲线在某类奇点近旁的射影表示，并以之完成P^n的曲线的几何学构造理论。对于这个理论，张素诚1942年作了进一步完善。苏步青还研究了引人注目的伴随二次曲面Q_1在曲面的一个正常点的导入问题，得到了重要结果：如果对于一个曲面所作各点的Q_1总是一定不变的，那么对应的曲面必须是双方S曲面。在此基础上，他十分简洁地作了S曲面的分类和各类具体的方程表示。到当时为止还未能解决的决定单方S曲面的问题——Fubini问题，则由白正国1942年完全解决。苏步青于50年代在射影极小曲面理论方面获得了新特征，这样一个射影极小曲面S和其一

Demoulin变换S'可以导出五维球面空间S^5上的五个拉普拉斯序列的构图。这个结果同高维射影空间的共轭网论有密切的关系。苏步青对高维射影空间共轭网理论所进行的系统研究，运用了外微分形式法，他引入了一个拉普拉斯序列的第K类共轭序列这一基本概念，由此得到包括存在定理、嵌入定理、周期的和伪周期的拉普拉斯序列的基本性质等一系列结果。苏步青和谷超豪对K展空间几何学的各种问题如射影运动论、可积分条件、平面公理以及隐函数方程的新理论等，作了系统的开发工作。苏步青首先从一般化的射影运动群入手，找到了容许这种运动的K展空间S_N应满足的充要条件。七十年代初，苏步青利用射影几何、微分几何促进计算几何研究获得了成功。八十年代初，他又把代数曲线的仿射不变量理论引入计算几何学，解决了三次参数样条曲线、三次贝齐埃曲线和三次B样条曲线的几何特征与形状控制。从1927～1977五十年间，苏步青共发表150多篇学术论文和七本专著。这些论文分别在中、日、英、美、德、意等十多个国家的数学专刊上登载。他的著作《射影曲线概论》(1954，英译本1958)、《射影曲面概论》(1964)、《一般空间微分几何学》(1958)、《计算几何》(1981)、《微分几何五讲》(1979，英译本1980)、《射影共轭网概论》(1977)、《仿射微分几何》(1982，英译本1983)对中国和世界微分几何学研究有着重要影响。苏步青现为中国科学院学部委员。

苏步青的学生谷超豪不仅是偏微分方程专家，而且是杰出的微分几何学家。50～60年代，谷超豪对芬斯拉(Finsler)空间到闵可夫斯基空间的安装与变形问题大域嵌入问题以及仿射联络空间或道路空间在N维射影空间中的黎曼空间的实现问题取得了一系列成果。他的工作开辟了在嘉当空间里对仿射联络的决定的研究。他按照隐函数方程对K展空间几何学进行探讨，又在齐性黎曼空间运动群的研究中，发展了著名的嘉当方法。他和胡和生在

众所公认的困难领域——李-嘉当的无限连续变换拟群的研究上取得不少突出成果，特别是获得了“凡是可作为无限连续群的迷向群中，只有10种实的不可约的线性群”的结果。1974年，谷超豪与杨振宁、胡和生合作，在规范场的微分几何结构方面进行深入研究，其中包括引力瞬子解的几何解释及其具有局部对偶性的黎曼空间、规范场的对称破缺和对偶荷量子数值的决定、规范场强度对规范场的决定作用、球对称规范场及其决定等方面。谷超豪与杨振宁联合发表的论文《规范场理论若干问题》受到国际上的重视。在研究过程中，谷超豪对规范场理论使用“环路位相因子”方法，发展了该理论的杨氏积分形式，即将一般的杨-米尔斯基础放到“环路位相因子”的概念上，就推导出所有的物理量。他特别给出规范这个概念的物理学意义，而且在杨-米尔斯场，甚至在非阿贝尔场合的决定中，对场强度如何起主导作用的问题给出了对应的数学命题。80年代初，谷超豪与胡和生合作考察了杨-米尔斯场的时空对称性，在最一般情形下对任何紧致规范群完全决定出了全部球对称规范场；研究了规范场的规范条件，把规范场的洛伦兹规范条件的确定归结为变分问题，并提出一种新的规范条件，如果这种规范条件满足，场就有了新的守恒量。谷超豪继续发展了他首创的环路位相因子法，定出了规范场方程所有的局部解，证明在欧氏空间情形下解的解析性，并指出一切局部解都用来制作负常曲率空间的整体解，还完全定出四维黎曼空间上整体的平行规范场。胡和生还研究了具质量的规范场，证明了闵可夫斯基时空只有四维时才可能有静态的有限能量解，并发现当质量趋于0时的一种新的不连续性。谷超豪在偏微分方程和规范场理论方面的系统成果，分别获得1982年国家自然科学二等奖与三等奖，引起国际数学界重视。谷超豪曾受聘任美国纽约州立大学石溪分校理论物理研究所访问教授、研究员，多次应邀赴国外讲学。现为中国科学院学部委员、数理学部

常委。

鉴于规范场这个粒子物理中的重要理论与纤维丛这个微分几何学理论在本质上的惊人共性，杨-米尔斯场理论的奠基人杨振宁博士曾对纤维丛理论的奠基人陈省身说："非交换的规范场与纤维丛这个美妙理论在概念上的一致，对我来说是一大奇迹。特别是数学家在发展它时并没有参考物理世界，而是没有现实依据想象出来的。"杨还说，"规范场的方程式是物理学者从19世纪的电磁学方程推广出来的。惊人的地方是这些方程式后来发现和数学家的纤维丛观念有密切的关系。1974年又发现了这些方程式与陈氏级的关系，……至于为什么自然界的各种力[注]都要建筑在几何学的纤丛观念上始终是不解之谜。"陈省身教授则引用著名物理学家威格纳（A. L. Wegener, 1880～1930）的话"数学在物理中有超乎常理的有效性"来表达自己的惊奇。陈省身说："广义相对论所需要的黎曼几何和规范场所需要的纤维空间内的联络，都在物理应用前为数学家所发展，这个'殊途同归'的现象真令人有神秘之感。""规范场就是矢量丛的联络，……微分几何与理论物理真是'同气连枝，同胞共哺'了。"陈省身认为，数学中纤维丛理论之所以能够超前描述物理世界中的规范场，而使这种抽象理论与实际惊人结合的理由在于"科学本身的整体性"。

决定黎曼空间的阶数这一经典问题所引起的嵌入问题的研究，除前述的谷超豪的工作外，胡和生成功地研究了黎曼空间到常曲率空间的嵌入与变形问题，把苏联数学家N. Yanink的结果一般化了。吴光磊则研究嵌入欧氏空间 E^{2n} 中的可定向黎曼空间 V_n 的拓扑性质，他在假定Whitney的自交数的积分表达式给定的前提下，导出另一个不变量与其积分的关系。吴光磊还阐明了 V_n

[注] 近代物理学研究自然界的力，发现共有四种：核力、电磁力、弱力和引力。四种力和它们的能都是规范场。

的切m-平面元素组成的纤维丛M^{m}_{n}的同伦性质。

在K展空间几何学的开发方面，除苏步青、谷超豪的工作外，严志达在嘉当意义下考察了射影联络空间S_N，在其中设计了所谓K测地流形，由此研究了平面公理和自由运动可能性公理的问题。对李群、齐性空间、一般齐性黎曼空间的研究，严志达得出了一系列有价值的结果，例如关于贝蒂数与一些高斯-彭纳型积分；齐性空间的分类问题，其中包括解析拟群所决定的齐性空间。对多复变函数论引起的一些几何问题，例如不能扩展域的酉几何、酉曲率性质及域的解析等价问题等，也进行了深入地研究。严志达和吴大任在七十年代将活动标形法用于齿轮研究，简化并发展了古典齿轮啮合原理，使微分几何学在机械工业中得到重要应用。

吴文俊等自1976年以来，在几何定理的机械化证明方面取得了突破：成功地证明了勾股定理、西姆逊线定理、巴普斯定理、帕斯卡定理、富尔巴赫定理等；把微分几何的一些有名定理（如贝屈朗定理）推广到仿射微分几何和射影微分几何并发现和创造了一些艰深的新定理如帕斯卡圆锥曲线新定理。这种定理的证明与发现，在数学研究手工业式的过去，简直是不可想象的。吴文俊的工作观念新颖，方法别具一格，效率很高，与1950年波兰数学家塔斯基（Tarski）和其他人所使用的方法完全不同，理论上也有突破。吴文俊所采用的方法大致分两步：第一步是几何的代数化，即引进坐标，把有关假设和求证部分用代数关系来表示。第二步是处理表示代数关系的多项式，即把终结多项式中的坐标逐个检查，采用多项式的消元法验证。如果消去的结果为零，则表明证明正确，否则再作进一步检查。吴文俊的工作曾获全国科学大会重大科技成果奖和中国科学院科技成果一等奖。吴文俊现为中国科学院学部委员。顺便指出，数学机械化（即数学研究工作的计算机化），已成为近年来国际上颇受重视的研究课题，微

分几何定理的机械化证明是大有发展前途的研究方向，尚有许多理论和实际问题需要进一步探索。

在大范围微分几何学研究方面，白正国1956年在闭曲线的整体几何方面拓广了著名的芬格尔（F. Fenchel）定理，从而也就拓广了勒维-契维塔（Levi-Civita）定理。这个结果明确了现代的与古典的雅可比定理之间的关系。1957年，吴光磊在《2n维欧氏空间中的n维子空间》一文中给出子空间自身相交的交点数与法示性类的关系，并导出自交点数与曲率的公式，其中自交点数与法示性类的关系是纯属微分拓扑的。吴光磊1976年关于示性类的超渡工作，是国内早期大范围微分几何学研究最重要的成果之一。他在《示性式的超渡》中，给出了建立超渡的一般公式，并应用于陈（省身）类，导出陈类的积分公式。1980年，吴光磊发表《Cartan引理的推广》，将嘉当引理完全（指包括对称性）地推广到高次形式。嘉当引理是微分几何学中一系列推算的基本依据，它的推广则是一些苏联几何学家研究工作的理论基础。在子空间理论的研究方面，对具平行平均曲率的极小子流形和子流形，彭家贵（与M. do Carmo合作）推广了R^3中伯恩斯坦（Bernstein）定理。田畴和陈维垣用管状超曲面得到欧氏空间中任意维数的紧致定向子流形上的某些积分公式，将全曲率的有关结果推广到子流形上，并应用莫尔斯不等式建立了子流形局部性质与整体性质之间的某种关系，又推广了在超曲面场合由嘎德纳（B. R. Gardner）得到的积分公式及闵可夫斯基公式。严志达在对称黎曼空间的谱理论；黄正中在容有正交全脐点超曲面族的爱因斯坦流形以及具半对称度量联络的空间；王启明在复射影空间中的等参数超曲面；梅向明在子流形上的亚纯向量场都得到了有意义的结果。

调和映照是当前大范围微分几何研究中引人注意的方向。所谓调和映照是指两个黎曼流形间的这样可微分的映照而且成为能

量积分的临界点。它不仅与许多几何问题及偏微分方程有密切联系，而且还与理论物理有关。过去往往只讨论了黎曼空间（具正定线素）之间的调和映照，谷超豪开辟了闵可夫斯基平面到完备黎曼空间的调和映照的研究方向，建立了这种调和映照的完整理论，证明了任何C^2初值柯西问题的大范围解必存在。通过调和映照，对 Sine-Gordon 方程的孤立子解给出了解释。作为物理应用，谷超豪证明：在R^{1+1}的场合，二维σ-模理论是没有奇异性的粒子物理中的一种非线性场。对于稳定调和映照（即当调和映照有非负的第二变分时），忻元龙在1982年证明了单位球$S^n(n\geqslant3)$到任何黎曼流形的非常数的稳定调和映照的不存在性，从而拓广了在终点流形S^n的场合的Eclls-Sampson定理。潘养廉把上述定理扩充到欧氏空间中的紧致流形的场合。特别是，他证明了：如果欧氏空间的闭凸超曲面M的各个主曲率小于所有主曲率的总和之一半，那么从M到任何黎曼流形的非常数的稳定调和映照不存在。陈咸平证明了球面中子流形是极小子流形的充要条件是：它的高斯映照是调和映照。近几年，我国大范围微分几何学研究取得了一批重要成果，受到国内外同行专家的重视和好评：虞言林证明了阿蒂雅-辛格尔局部指标定理，这是对阿蒂雅-辛格尔指标定理的重要发展；彭家贵研究了球面上极小子流形间断点；李安民对常曲率空间中全脐超曲面的特征给出了一个很一般的刻划，包含很多经典结果作为特例，在大范围仿射微分几何学的奠基性研究方面，对伯恩斯坦问题、椭球的特征、布拉须盖度量为常曲率的凸曲面的分类等方面作了很有意义的工作。

第 十 章

现代数学发展概观之六：拓 扑 学

Ⅰ．拓扑学的早期阶段

拓扑学（Topology）是继欧氏几何、解析几何、微分几何、射影几何之后的一门较新的、研究图形（或集合）在连续变形下的不变的整体性质的几何分支。过去称做"位置分析(analysis situs)"，并有"橡皮几何学"的俗称。以本世纪初的观点，拓扑学分成组合拓扑（包括代数拓扑和微分拓扑）和点集拓扑（或称一般拓扑）两部分。前者把几何图形看作由一些基本构件所组成，用代数工具结合这些构件，并研究图形在微分同胚变换下的不变性质；后者把几何图形看作点的集合，再把集合看作一个用某种规律连结其中元素的空间。现在，拓扑学已成为最丰富多采的一个数学分支，它渗入并沟通了数学的大多数分支，而且通过图形的手段，在自然科学和工程技术中有了日益重要的应用。这可以从菲尔兹奖获得者的工作中得到充分的反映：因拓扑学而获奖或其工作与拓扑学有关的就有八、九人之多，占总人数的三分之一；与代数几何学有关的也占三分之一，而所有代数几何学的工作都离不开拓扑学。拓扑学在第二次世界大战后已发展成为现

代数学的主流。法国布尔巴基学派领袖、大数学家迪多内说："代数拓扑学和微分拓扑学由于它们对于所有其它数学分支的巨大影响，应该名副其实地称为二十世纪数学的女王。"数学家们甚至这样认为：不懂拓扑学就不可能懂得现代数学。

拓扑学一般被认为源于欧拉的康尼斯堡七桥问题，并把欧拉定理即"对任意闭的凸多面体，恒有顶点数－棱数＋面数＝2，当凸面体经过任意的拓扑变换时，公式仍成立"——作为历史上关于拓扑学的第一个定理。1833年，高斯用线积分定义了空间曲线的环绕数。1847年李斯亭出版《拓扑学的初步研究》，最早使用"拓扑"这个术语。李斯亭从1858年起致力于拓扑研究，寻求几何图形的定性规律。梅比乌斯第一个给出了对拓扑研究的本性的恰当提法，并发现了闻名的"梅比乌斯带"。黎曼的复变函数论工作（1851）给了拓扑研究最大的推动力，他在函数论各方面的研究都溶汇了拓扑思想。黎曼解决了紧曲面同胚问题，引进了黎曼面的连通性对曲面分类（实际上即是后来说的对闭曲面按方格分类）。克莱茵研究了闭曲面的拓扑等价问题，并在1882年引进现在所谓的"克莱茵瓶"这一曲面。法国数学家毕卡尔1890年用代数几何方法研究了拓扑中曲面的连通性。意大利数学家贝蒂1870年研究了同调群和高维图形的连通性。19世纪末已发展得颇为完善的闭曲面理论，为系统拓扑学的产生打下了基础。

组合拓扑学的开创者是法国大数学家庞加莱。从1895年起，庞加莱系统地、一般地研究几何图形的组合理论，他在《位置分析》中引入同调概念给复形的同调群下了一般定义，证明了著名的"庞加莱对偶定理"。他还定义了基本群，这成为后来同伦群的发端。庞加莱在1895～1904年间发表了一系列论文，提出流形、单形、复形、边缘、链、贝蒂数、挠系数、示性数等概念。庞加莱的方法是以多面体为对象，把点、棱、面推广为标准构件——单形，然后把所有图形都分解为单形的组合——复形，从

而得到其拓扑性质。庞加莱论文遗留下一些重要猜想，例如他在1904年猜想：一个3维的封闭曲面，如果其中每一条封闭曲线都能成缩成一个点，它就与3维球面相同。对于4维以上球面的类似刻划，又被称为高维庞加莱猜想。上述猜想，成为20世纪许多数学家的主攻目标。

组合拓扑早期的重要人物有荷兰数学家布劳威尔、美国数学家维布伦、伯克霍夫、莱夫舍茨、亚历山大等。布劳威尔1910年发现了一个重要的组合不变量及不动点原理。这两个问题的解决导致了一些新的拓扑方法的发现，从而使高维流形的连续映象理论和高维流形上的向量场理论迅速发展。不动点原理在微分方程、非线性分析中有广泛的应用，而组合方法对近代拓扑学的巨大价值在于它开辟了应用某些代数方法来解决拓扑问题的可能性，不动点原理就是产生这种方法的典型。其后，庞加莱在1912年逝世前不久作了“如果某拓扑定理成立，有限制的三体问题中将会存在周期轨道”的猜想。1913年伯克霍夫证明了这个猜想，得到庞加莱-伯克霍夫不动点定理（亦称庞加莱最后定理）。之后，不动点理论发展迅速，并被应用于各种领域。

莱夫舍茨除建立了连续映象一般代数理论的基础之外，还给出了关于流形上任意自我连续映象的不动点代数总数的著名公式。1922年，亚历山大证明了贝蒂数的拓扑不变性和基本对偶定理。20年代末，苏联数学家Л·С·邦德里雅金给出了他的一般对偶律，并建立了交换群的一般特征标理论，由此又引导他对一般拓扑群与古典连续群的研究。柯尔莫哥洛夫和亚历山大洛夫都得到以他们各自的名字命名的对偶律——这些都是近代拓扑学的突出成果。

Ⅱ. 代数拓扑学

兴起于19世纪末、20世纪初的拓扑学，到30年代有了重大进展。自30年代中期起，组合拓扑学的发展方向一分为二。一个方向是随着同调论的发展，德国女数学家埃米·诺特把抽象代数的观念推进到组合拓扑学中去，使组合拓扑学完全成为代数拓扑学。有了代数这个工具之后，法国布尔巴基学派及美国数学家于30～40年代引入了纤维丛、示性类、谱序列、上同调运算等一系列新工具，给拓扑学打下了运算基础。50年代起，代数拓扑学突飞猛进，成果极多。

抽象代数学的奠基人埃米·诺特认为拓扑不变量不仅限于数，还可以归结为群和环之类的代数结构。在这一关键思想的启发下，拓扑学家引入同调群概念。瑞士数学家德·让1931年最先发现多维流形上的微分形式和流形上同调性质有联系，定义了"德·让同调群"。其后，各种上同调群定义相继出现。接着，莱夫舍茨、亚历山大等在1942年左右引进上同调环。而波兰数学家赫尔维茨1935年引入同伦群，怀特黑德又把研究对象推广到CW复形（这是现代集论拓扑学的主要对象），并得到同伦等价条件的代数刻划。同调、同伦概念的引进，使拓扑学大大的深化了。但由于当时的同调群多种多样，因而很有必要加以统一。1944年，爱伦伯格和斯蒂洛德将同调论公理化，结束了同调论发展的混乱局面。而成为拓扑学重要课题的同伦类研究，自布劳威尔、霍甫、赫尔维茨、爱伦伯格、邦德里雅金等人奠定了这个新方向的基础后，发展很快。近年来，由新兴法国拓扑学派的莱雷、谢尔等大为推进。当然，还遗留着许多尚未解决的问题。

随着上同调群、同伦群等概念的引进，爱伦伯格1940年对障

碍理论加以系统化（同伦论中的布劳威尔映射定理、霍甫扩张定理、分类定理等古典结果可看作障碍理论的开端）。障碍理论是上同调运算、示性类等现代拓扑学中重要概念的起因，而且在纤维丛截面、流形之间的微分同胚等方面有重要应用。上同调运算理论是斯蒂洛德和邦德里雅金1947年左右将上同调运算引入障碍理论之后发展起来的，它在研究微分流形的示性类、同伦型问题、霍甫不变量、球面同伦群、球面上的切r标架场问题等方面成为代数拓扑学主要的工具，给代数拓扑学带来了重大变革。法国数学家塞尔1951年对纤维丛空间引入谱序列方法，H・嘉当和塞尔等1954年在重要的空间的上同调运算及同伦群方面，都取得显著进展。球面S的同伦群是理论相当丰富但计算十分困难的最典型例子，对它至今仍所知不多。塞尔证明了π_m（S^n）对于$m>n$是有限群，除了π_{2n-1}（S^n）当n为偶数时的情形之外，后来一般结果很少。塞利克1978年证明：对π_n（S^3）的p分量x，均有$px=0$。美国数学家科恩、莫尔、勒森多菲尔1979年推广到S^{2i+1}，证明对π_n（S^{2i+1}）的p分量y，都有$p^iy=0$。塞尔还提出了一个猜想：设ΩE为单连通有限复合形E的闭路空间，则ΩE的庞加莱级数（一个复形同调群的秩数可归并为一个庞加莱级数）定义为p（ΩE）

$$=\sum_{i=0}^{\infty} rank\ H_i(\Omega E;Q)t^i$$，其中$rank$表示秩，Q为有理数域，塞尔猜想p（ΩE）是t的有理函数。70年代末亚里克造出一个例子否定了这个猜想，这个例子是五个S^2和七个e^4（四维圆盘）构成，连接映射由一些怀特黑德积构成。有必要强调一下，塞尔前面那个“除了以前知道的两种情形之外，球面的同伦群都是有限群”的结果是同伦群的头一个重要的一般结论。它是塞尔利用勒瑞等引入的谱序列等工具解决了纤维、底空间、全空间的同调关系问题的基础上证明的。塞尔还引进局部化方法把求同伦群的问

题加以分解，从而获得一系列结果（这种局部化方法到70年代又有了新发展)。他还发现了上同调运算与某一空间的上同调之间的对应关系，这项工作使上同调运算系统化。塞尔工作之前，同伦论发展处于不景气的状况，特别是同伦群的计算是一大障碍，连邦德里雅金在这方面都出了错。而年仅二十出头的塞尔却知难而进，并迅速获得巨大成就从而使这门极其困难的年轻学科的面貌发生了巨大变化。正是由于在代数拓扑学方面的杰出工作，塞尔荣获1954年第三届菲尔兹奖，当时还未满28岁。第二年，他又提出了著名的“塞尔猜想”：多项式环上的射影模一定是自由模。很多数学家认为这个问题解决的希望十分渺茫。1976年，却出人意料地由美国数学家丹尼尔·奎伦一举攻克。

奎伦是1978年菲尔兹奖获得者，因代数学与拓扑学工作得奖。他从事的主要工作有：同伦论；复配边理论与形式群理论；证明K理论中的亚当斯猜想；创建高维代数K理论；证明塞尔猜想。奎伦的工作以概念的丰富性和技巧的高超性著名。他一方面把拓扑学方法应用于代数学，十分巧妙地把代数问题变成较一般的拓扑问题，然后利用拓扑方法予以解决。他用拓扑方法证明了许多人都没能解决的一个猜想：模p上同调环的维数与这个有限群的最大交换p子群的阶数相等。还得到了关于有限域上的典型群的一系列美妙结果。另一方面，他又用这些代数结果去攻克拓扑学的问题，例如亚当斯猜想和塞尔猜想。英国数学家亚当斯于1962年用K理论解决了“n维球面上有多少个线性独立的向量场”这个长期悬而未决的古典问题之后，又于1965年提出了一个大胆的猜想：作用在球面上向量场上面的格罗申第克群的运算即ψ运算的代数性质，与向量丛的拓扑性质有某种定量关系。奎伦在用拓扑方法证明这个猜想受挫后，转过头来运用自己的群表示论的结果使问题利索地得到了解决，时间是1970年。奎伦不仅是解决超级难题的好手，而且还是善于建立系统理论的行家，这方面的

工作请见现代数学发展概观之四抽象代数学中的代数K理论。

同伦群在80年代前期的主要成果有：林文雄用谱定义决定了无穷维实射影空间RP^{∞}的稳定上同伦群：〈1〉如果$n>0$，那末有$\pi_s^n(RP^{\infty})=0$;〈2〉如果$n=0$，则可证明赛嘎尔(Segal)猜想的$G=Z/(2)$的情形。古纳瓦尔旦证明了$G=Z/(p)$，p为奇素数的情形。拉文内进一步证明G是循环群的情形。球面稳定同伦群是同伦论的中心问题之一，在70年代虽然得出一些结果，但这个问题远未解决，以至于有人怀疑它是否能完全解决。为了计算，拓扑学家在球面稳定同伦群中引进乘法结构，使之成为环。乘法结构中最常用的是复合乘积，另外还有碎压乘积和结并乘积。1980年科赫曼证明了这三种乘积构成的环（谱）大致等价。

Ⅲ. 微分拓扑学

组合拓扑发展的另一方向是研究微分映射性质，阐明流形的拓扑结构、组合结构、微分结构等的关系，而不去考虑微分几何学中的概念如联络、曲率、测地线等。这就是微分拓扑学。它同代数拓扑学一样，在今后一段时间仍将是数学发展的前沿。

1936年，美国数学家惠特尼证明了微分流形浸入定理，正式创立微分拓扑学。J·H·C·怀特黑德证明了组合流形的正则邻域定理。50年代中期以后，法国的托姆、美国的米尔诺和斯梅尔、英国的齐曼等著名数学家的一系列重要成果，把微分拓扑学这门学科的研究推向热潮。特别是米尔诺得到七维球面上可以容许多个彼此不同的微分结构的惊人发现，使微分拓扑学成为二十多年来最活跃的一个数学分支。

在组合结构与微分结构之间的关系问题研究方面有以下著名结果：凯恩斯的三角剖分定理（1935）；克威尔对组合流形微分结

构存在性问题举出反例（1960）；米尔诺证明在S^7上有多个彼此不微分同胚的结构（1956）；米尔诺、克威尔、斯托林等发现同伦球面的微分结构在连通和运算之下成为阿贝尔群θ_n。斯梅尔1962年进一步证明这个群可以按h配边分类而得到；托姆得到“不考虑定向的流形的配边类与某稳定同伦群自构”的结果；亚当斯在微分流形的可平行性、殆可平行性、π流形等的研究中，使用K理论解决向量场即切r标架场问题（1962）。

现在，让我们较为详细地介绍一下托姆、米尔诺、斯梅尔、诺维科夫以及瑟斯顿的工作。正是他们富于开创性的工作，使得微分拓扑学这门学科日新月异、灿烂辉煌。

法国数学家雷内·托姆，因在70年代创立了风靡世界的突变理论而名扬天下，他的名字在西方几乎到了人人皆知的程度。其实，早在50年代，托姆对拓扑学和奇点理论就做出了卓越贡献，并因此荣获1958年第4届菲尔兹奖。突变理论正是以微分拓扑学的方法分析高维空间曲面的奇点及稳定性结构，从而建立描述各种飞跃和不连续现象的数学模型。

微分拓扑学的主要问题是流形的拓扑分类。一维流形的分类是显然的，二维流形的拓扑分类及同胚问题早在19世纪中叶由黎曼解决。高维流形的分类就相当困难了。托姆在布尔巴基学派成员、著名数学家H·嘉当和埃瑞斯曼指导下，以著名论文《球丛空间及斯廷洛德平方》于28岁时获国家博士学位，其后致力于高维流形的分类问题。他在1954年创立了“配边理论”，给出了任意两个流形属于同一类的充分必要条件。这里，如果两个流形共同成为一个流形的边缘就称为配边，而相互配边的流形称为同一类。这样，托姆对流形的粗糙（而非完整）的分类工作取得了成功。他还定义了所谓“代表”，一个类有个代表，使任一流形归属于某一代表的类。配边理论不仅是微分流形理论的一大成就，而且在应用上有重要价值。1955年，德国数学家赫采布鲁赫利用配

边理论作工具，证明了代数几何学中高维代数簇的黎曼-罗赫定理。米尔诺证明七维球面上有多种不同的微分结构时，配边理论也作为有效工具而大显身手。

约翰·米尔诺1954年23岁时在普林斯顿大学获博士学位，至60年代中期，在微分拓扑学和代数拓扑学上取得了许多成果。他开展工作的特点是：一、在向一个新分支进军前，总是要先整理总结已知的结果，有时还写成系统的讲义，使之成为一个分支的入门。二、善于利用拓扑学的方法解决其它领域的问题。经过他之手，微分拓扑学的疆界在其它领域中作了十分广泛的扩展。米尔诺出手不凡，一鸣惊人，第一个重大工作就使他一举成名，他依靠邦德里雅金示性类、纤维丛、配边理论和莫尔斯理论等代数拓扑学的新工具证明了七维球面上有不微分同胚的结构。并运用同伦论进一步证明这种不同的微分结构恰好有28种。对于更高维的球面，米尔诺和他人合作也得到非常完整的结果。1958年，他利用拓扑学结果证明了代数和几何学的经典问题：实数域上的可除代数只有已知的实数域、复数域、四元数体和凯利代数。还证明了只有一、三、七维球面才存在处处平行的向量场。1959年，利用亚当斯谱序列发展了托姆的配边理论，解决了复配边、自旋配边等理论问题。复配边理论是一种有多种功能的工具。1961年，他举反例否定了有50余年历史的“庞加莱主猜想”.1962年荣获菲尔兹奖以后，他主要研究纤维丛、怀特黑德挠率、曲率与基本群的关系、二次型理论、浩卜夫代数理论、代数数论等，特别是对复超曲面奇点和代数K理论，更是作了开创性的贡献。米尔诺在60年代末就任普林顿高等研究所教授，70年代任美国国家科学院院士、美国数学会副会长，并荣膺美国总统授予的科学奖章，这是美国科学界的最高荣誉。

美国数学家斯蒂芬·斯梅尔1956年26岁时在密执安大学著名拓扑学家鲍特指导下，以论文《微分流形的浸入问题》获博士学

位。著名数学家托姆对他的科研方向有决定性影响。斯梅尔的主要工作是证明"广义庞加莱猜想"(即五维和五维以上的庞加莱猜想)。1960年以后，他转向研究微分动力系统理论，1967年发表经典著作《微分动力系统》，从而创立了现代抽象动力系统理论，使之成为70年代的热门领域——大范围分析的重要组成部分。斯梅尔关于广义庞加莱猜想的杰出成就，使他荣获1965年美国维布仑奖、1966年第6届菲尔兹奖。自60年代后期起，斯梅尔从纯粹数学转向应用数学，解决了力学、统计力学、生物学、湍流、运筹学、特别是数理经济学等领域的许多问题。

下面，简述一下庞加莱猜想的解决情况。如前所述，流形的同胚与拓扑分类是微分拓扑学的中心问题之一。一百多年来，三维、四维流形的分类及同胚问题一直没有多大进展，其中主要的拦路虎就是庞加莱猜想。许多人进行过大量工作，并多次有人声称已经证明，但其实都有漏洞。五十年代以来，国际数学界对高维流形的拓扑作了充分的研究，但并不包括三维、四维的情况。斯托林、斯梅尔及英国数学家齐曼意识到要解决三维、四维庞加莱猜想太困难了，于是干脆绕过它而直攻大家认为没有希望的五维以上的广义庞加莱猜想，终于在1960年获得成功。四维以上流形的同胚与拓扑分类问题是数理逻辑中的所谓不可解问题。斯梅尔等人的工作，无疑是一项重大成就。但是，他们所采用的"换柄术"在四维就施展不开了。

第二年，波兰数学家马祖和米尔诺对另一个著名的猜想——"庞加莱主猜想"举出反例：证明了低于三维的主猜想成立，但不低于五维的主猜想错误。三维、四维的主猜想是否正确则是个未解决的问题。米尔诺还举例证明一个多面体有两种不同的分解方法。又举例说明一个有边缘的流形里面微分同胚，但里面加上表面就不同了。这表明了高维流形的拓扑性质具有难以预料的奇妙性与复杂性。

1981年8月，美国加州大学圣地亚哥分校的弗里德曼宣布他证明了四维的“庞加莱猜想”。他利用70年代初英国的卡森发明的“柔柄”，克服了斯梅尔遇到的障碍。此后不久，英国牛津大学的唐纳森宣布他把弗里德曼的成果与微分几何学的新成果结合起来，证明了四维实数空间，除通常的微分结构外还存在着不寻常的微分结构。这一惊人的论断，超出了拓扑学家们的直觉与经验，对别的数学分支以至对理论物理都大有影响。1986年在美国加利福尼亚大学伯克莱分校举行的第20届国际数学家大会上，弗里德曼和唐纳森荣获第11届菲尔兹奖。

至今，只有三维庞加莱猜想悬而未决了。但近年来这一问题有较大进展。黑肯曾于1962年提出一个解决三维流形同胚问题的方法，它不适用于透镜空间，但适用于基本群较复杂的一大类空间。80年代初，黑肯改正了其中的错误，从而使这类较复杂的三维流形的同胚问题获解决，同时经典的扭结理论中打结问题也可解决，即任给一个扭结，通过黑肯的算法步骤可以判定它是否为一个不平凡的结。这个方法是给出具体算法来判定这类三维流形中两个流形何时同胚。但由于三维庞加莱猜想并未得到彻底证明，所以同胚及拓扑分类问题有待于进一步发展。

对三维流形的拓扑分类作出贡献的还有美国数学家威廉·瑟斯顿，他因此成为1979年度的华特曼奖和1982年第10届菲尔兹奖的得主。

瑟斯顿的工作是从研究三维流形的叶状结构理论开始的。他在柏克利分校著名拓扑学家莫利斯、赫什指导下，以关于叶状结构的论文于26岁(1972年)时获得博士学位。当时，恰逢叶状结构这门学科在停顿多年后由于鲍特的工作而刚获新的生机。瑟斯顿进入该领域不到两年，就取得了一系列具有普遍意义的成果。例如，他证明了任何紧致三维流形都存在有二维紧叶。进而证明n维紧致流形上存在一个光滑的$n-1$维叶状结构的充要条件是该流

形的欧拉示性数为零。同时，他得到了更普遍的分类定理。在此之前，关于叶状结构理论只有零星的较简单的结果。因而瑟斯顿的工作对叶状结构理论的发展具有革命性的重大意义。为此，荣誉也接踵而来：1974年他被聘为普林斯顿大学教授，1976年获美国数学会维布仑奖。

更重要的是瑟斯顿基本完成了三维封闭流形的拓扑分类，这是比叶状结构理论更艰难的课题。瑟斯顿从考虑二维流形同流形的几何性质的关系入手。把经典的二维理论推广到三维流形，这是一个极有意义的推广。他研究了八种典型的几何结构，大多是具备负常曲率的罗氏非欧几何，并且提出了使流形分类基本上解决的猜想：任意紧致三维流形都有一个‘几何构造’，即它的内部都是一些子流形的并集，每一子流形都是八种类型几何结构之一，也就是都有一个局部齐性度量。这个猜想尚未完全获证，只是在一些重要情况（许多类三维流形）下得证。一般地证明瑟斯顿猜想是八十年代、甚至可能是九十年代的一个突出问题。大数学家阿蒂雅对此发表高见：“寻找一个研究途径，它以巧妙地选择一个变分问题为基础，这是很吸引人的。证明一个这种类型的存在定理将最终成为一个分析问题，然而为了得到最好的提法，大量的几何直观是必要的。”（1983年10月在法国高等科学研究所的讲话）。

最后，介绍获得菲尔兹奖的第一位苏联数学家C·П·诺维科夫。诺维科夫的工作开始于对托姆创立的配边理论的研究，他取得了许多结果，例如在1959年采用与米尔诺相同的方法即同伦论，解决了复配边理论问题。之后，他又反过来用配边理论解决同伦论问题，把配边理论变成广义上同调理论来研究各种性质，从而推动了同伦论的发展。他还在1964年用巧妙的几何方法证明了三维球面上存在有二维紧叶。这在当时的叶状理论中属最佳结果。

诺维科夫最主要的成就是证明微分流形的有理邦德里雅金示性类的拓扑不变性。邦德里雅金示性类是组合不变量，已由托姆

等人在1957年证明。而它的拓扑不变性却过了8年才获证。这说明了诺维科夫工作的困难性，因而引起了数学界的重视。七十年代起，诺维科夫对理论物理、相对论和量子力学的数学问题进行了富有成果的研究，他把孤粒子理论与代数几何学相联系，获得了令人惊异的结果。

微分流形（乃至一般的拓扑流形、PL分段线性流形）的嵌入和浸入问题一直是拓扑学的根本问题之一。惠特尼曾得到一个一般的经典结果，当$n>1$时，任何n维微分流形都能浸入到欧氏空间R^{2n-1}中。长期以来，有一个著名猜想是任何n维微分流形都能浸入到$R^{2n-\alpha(n)}$中，其中$\alpha(n)$是n的二进制展开中1的个数。而且这是一个再也不能改进的最好结果，因为存在流形X^n，它不能浸入$R^{2n-\alpha(n)-1}$中。许多数学家特别是布朗和帕特尔森虽经长期努力但均未证明。1981年，拉弗·科恩沿着布朗—帕特尔森开辟的途径，加上自己的新创见终于取得成功。

1983年，美国科罗拉多大学化学系的沃尔巴、理查兹和霍尔提万格合成出具有拓扑结构的梅比乌斯带那样的分子，使拓扑学首次进入有机化学领域。这项重大成果被列为1983年世界十大科技进展之一。

Ⅳ．一般（点集）拓扑学

直接（而不是作为多面体）研究欧几里得空间或拓扑空间中的一般的点集的拓扑性质的学科，称为点集拓扑学。19世纪70年代，康托尔建立一般集合论，研究了欧氏空间内的点集，引入了集点、开集、闭集等概念，并在数轴上构造了康托尔不连续统。这些概念逐渐抽象化，奠定了点集拓扑学或一般拓扑学的基础。1906年，法国数学家弗雷歇在其博士论文中采纳了由康托尔发展

起来的集合论的整套基本概念，建立了函数空间的一般理论。他定义了尺度空间及其紧致性和完备性，从而开辟了点集拓扑发展的抽象方向。他曾经试图定义拓扑空间，在他给出的形形色色的定义中，有一种是基于可数序列的收敛性，后来经年轻的苏联数学家П.С. 乌利逊修正而产生了现在称作弗雷歇—乌利逊空间的这一类（很特殊的）重要空间。1914年，德国数学家豪斯多夫证明了尺度空间的紧致性等价于它的完备性加上完全有界性，并第一个令人满意地定义了一类足够广泛的拓扑空间，而且囊括了这类空间的初等性质以及有关概念。他提出的拓扑空间公理系统，为点集拓扑学奠定了基础，体现了该学科领域发展的一个阶段。目前公认的一般的拓扑空间，最早是由波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratowski）1922年引进闭包运算公理体系来定义的。

20年代初，点集拓扑学抽象方向的中心课题一是双紧致性问题，二是拓扑空间的尺度化问题。致力于第一个课题的，有波兰数学家夕尔宾斯基（Sierpin'ski）和库拉托夫斯基的初步工作，有苏联数学家П.С. 亚历山大洛夫和乌利逊1923年《关于紧致拓扑空间的研究报告》。后者还首次提出并解决了一般形式下的尺度化问题。乌利逊引入了与具有可数基的空间的尺度化问题相联系的“函数分离”这个基本概念，并证明了著名的“乌利逊大引理”——它是点集拓扑学最重要的命题之一。亚历山大诺夫解决了局部双紧致空间的尺度化问题。他们所引入的局部双紧致空间的所谓单点双紧致扩张的概念，成为后来蓬勃发展的拓扑空间双紧致扩张理论的基础。这个理论的奠基性工作是由苏联数学家А.Н. 吉洪诺夫给出的，他对于确定具有双紧致豪斯多夫扩张的所有一般空间这个首要的基本问题，证明了所求空间就是他引入的称为“吉洪诺夫空间”的完全正则空间。当时提出的吉洪诺夫空间的内蕴定义问题，直到1967年才由苏联数学家扎伊采夫（В.И. Зайцев）彻底解决。吉洪诺夫空间的引入是点集拓扑学发展

的重要一步，另外，吉洪诺夫还给出拓扑空间的"吉洪诺夫乘积"定义，证明了最重要的"吉洪诺夫定理"：任意多个，甚至是不可数多个双紧致空间的乘积仍为双紧致空间。同样，豪斯多夫空间（吉洪诺夫空间）的乘积仍为豪斯多夫空间（吉洪诺夫空间）；若τ为任意的基数，则权（即空间所有基底的势的最小值）小于或等于τ的τ个空间的乘积，其权小于或等于τ。

点集拓扑学的另一个发展方向是几何方向。在完全解决与构造皮亚诺曲线相联系的欧氏空间R^n的维数的拓扑不变性问题过程中，布劳威尔1911年引入映像度的概念，从而开始了拓扑学发展的布劳威尔时期。他除了得到不动点定理、n维约当定理等一系列经典结果外，还定义了维数（Ind）的概念，并证明了当时勒贝格对欧氏空间R^n定义的维数dim满足等式

$$\dim R^n = \mathrm{Ind} R^n = n$$

亚历山大1922年对布劳威尔证明的n维约当定理作了推广，并证明了"亚历山大对偶定理"，这个定理堪称拓扑学中最伟大的发现之一。1927年，亚历山大洛夫把它推广到更一般情形，即任意多面体P是n维球形空间S^n中任何紧致集的情形。从而开创了拓扑学的一个新分支——拓扑对偶理论。30年代，邦德里雅金和柯尔莫哥洛夫用同调理论来处理对偶理论，同时，维数同调论发展起来，导致点集拓扑学和组合代数拓扑学的融合，从而确立了拓扑学在本世纪中叶的发展方向。

一般维数理论是乌利逊和奥地利年轻的数学家门格尔（K. Menger）等人1921年各自独立地建立的，它使得最一般的点集都能按其基本特征——维数来分类，并引起以一种全新观点来研究最广义的几何形状。1930年的罗伯宁（Nöbeling）-邦德里雅金定理是一个最著名的结果，它断言任何n维紧致空间都同胚于$2n+1$维欧氏空间中的集合。赫尔维茨1925年关于可分尺度空间与n维紧致空间关系的工作，则是乌利逊之后进一步建立维数论

的基础。

另一方面，连续统拓扑由布劳威尔1909年构造第一个不可分解的连续统的工作而揭开序幕后，在波兰得到很大的发展：雅尼柴夫斯基1912年的不可约连续统理论是特别有趣的结果；马祖凯维奇（1913）和哈恩（H.Hahn，1914）定义了局部连通的连续统，并证明了它正好是线段的连续像；克那斯特（Knarster）构造出了继承不可分解的连续统。同时，连续统拓扑在美国由R.L.莫尔和宾格（R.H.Bing）为首的学派发展。宾格证明除了同胚不计外，仅存在唯一一个继承不可分解的连续统（伪弧）。

1937年，法国数学家魏依引入一致空间概念，用对角线的邻域（J.W.Tukey用一致覆盖）定义了一致结构，从而奠定了一致拓扑结构的基础。后来，Ю.М.斯米尔诺夫和J.R.埃斯贝尔（Isbell）建立了一致空间的维数理论。斯米尔诺夫还建立了邻近空间的一般理论，构造了邻近空间的完备化，研究了完备邻近空间，发展了邻近空间的维数理论，建立了一致空间和邻近空间之间的联系。邻近空间的理论是与一致空间的理论平行发展的，它也是尺度空间理论的推广。邻近空间的现代公理体系是叶夫列莫维奇（B.A.Ефремович）1935年提出的，但是到1951年才发表。以后，还出现了各种不同的广义邻近空间和其它一致拓扑空间的研究。

二次大战后，点集拓扑学在各个方向上迅猛发展。对拓扑空间的仿紧性和尺度化研究方面，深刻而困难的“斯托内(A.Stone)大定理”无疑是点集拓扑学最卓越的成果之一，它断定正规空间的仿紧性等价于它的可裂性。特别重要的是，从它容易推出尺度空间的仿紧性，并借助它寻找出许多优良的拓扑空间可尺化的新判别法。

映像和新的空间类的研究，是占据点集拓扑学主导地位的工作之一，取得了许多有意义的结果。例如应用广泛的米卡尔

（Michacl）定理（把零维仿紧空间映入完备尺度空间的下半连续值映像存在连续选择）是点集拓扑学最重要的定理之一。阿勒哈恩格里斯基（A.B.Архангельский）首先系统地研究了空间和映象的相互分类问题，他引入了层状空间、点式可数空间等许多类新的引人注目的空间。舍比恩（E.B.Шепин）定义并研究了K可尺空间，在点集拓扑学的发展中跨出了一大步。他在这里对尺度空间的推广提出了新的方法。

无限维拓扑空间理论、收缩核理论和型论等点集拓扑学新分支的兴起和发展，是拓扑学发展史上的重大事件。无限维空间理论的某些基本问题乌利逊早在1924年就已解决。充分深入的可数维空间以及超限维数空间的理论，主要有赫尔维茨和沃尔曼（Wallman），以及斯米尔诺夫证明的定理。收缩核理论是波尔舒克（Borsuk）30年代奠基的，多克尔（Dowker）、胡世桢、科达玛（Kodama）等人在战后对收缩核理论的完善作出了贡献。收缩核理论的原始概念属于点集拓扑，但这些概念的发展则需要代数工具，因此它与点集拓扑和代数拓扑都有联系。后来，波尔舒克又对紧致空间建立了与收缩核理论紧密相关的型论。其后，许多拓扑学家将之推广到更广泛的几类空间。型论中著名的成就之一是有几何特征的卡普曼（Chapman）定理，它引导拓扑学家进入无限维拓扑或Q拓扑的领域。Q流形的研究产生了一系列成果，其中安德尔森（P.Anderson）1967年在希尔伯特方体Q中引入并研究了Z集合的概念，随后又定义了Q流形，即局部同胚于希尔伯特方体的空间。

综上所述，拓扑学发展的布劳威尔时期是综合运用组合代数的思想方法和集论思想方法的第一个时期，所谓紧致空间的魏托里斯（Vietoris，奥地利拓扑学家）同调论，其依据就是布劳威尔的工作，而布劳威尔也为维数论奠定了严格的基础。1925—1943年，是在点集拓扑学中综合运用几何思想和集论思想的第二

个时期，主流工作是建立紧致空间和更广泛的空间一般同调论，建立拓扑对偶关系的一般理论以及维数同调理论。在点集拓扑学中把几何思想与集论思想结合起来的第三个时期延续至今，主导工作是波尔舒克开创收缩理论和型论，以及它们的进一步发展。这个领域的工作，深刻地体现了点集拓扑与现代同伦论美妙而紧密的渗透和结合。

本世纪以来，点集拓扑学对于各种类型的空间的公理基础，引进变种、特殊化、以及推广等，曾经引入了成百个概念，证明了成百个定理。因此，同其它数学分支一样，要对它的现代发展作全面的综合报告，无疑是一件困难的事。经过大半个世纪的发展，点集拓扑学现已比较成熟。除了传统的研究方向外，点集拓扑学与数学基础交互作用产生的边缘领域集论拓扑学是近年来颇引人注目的最新研究领域之一。

集论在1938年哥德尔证明著名的康托尔连续统假设和 ZF 公理系统的相容性而获重大突破之后，1963年美国数学家P.J.科恩关于连续统假设独立于 ZF 公理的证明以及所使用的力迫法又是一大突破。可构造公理、力迫法、津生原则等数理逻辑的原理和方法渗透于点集拓扑学，推动了对拓扑空间基数不变量的系统研究，到60年代后期开始形成完整的理论。集论拓扑学这个领域相当活跃，近年来，点集拓扑学的许多中心课题，例如拓扑空间是否可度量化以及各种紧性、局部紧性、仿紧性、可分性、林德洛夫（Lindelöf）性质等的讨论，往往需要借助集论的假设才能得到更满意的结果。此领域近期的突出成果有：弗勒斯纳（W.Fleissner）证明正规莫尔空间猜想（即它为可度量的空间）已归结为某种可测基数存在的问题，特别是他在 CH 下证明了此猜想不成立；中国数学家代牧民在 $2^{w}<2^{w_1}$ 之下证明了某种正规莫尔空间（满足所谓Dccc 条件）是可度量化的；科兹罗夫斯基（G.Kozlowski）等在 CH 之下证明了存在不可度量化的全正规流

形；鲁丁（M.E.Rudin）又在$MA+\urcorner CH$之下证明了每个全正规流形都是可度量化的，由于CH与$MA+\urcorner CH$都独立于ZFC，所以全正规流形是否可度量化在ZFC中是不可判定的。鲁丁还在集论假设$V=L$下，证明正规可遮空间可以不仿紧（甚至不可数仿紧）；西蒙（P.Simon）构造出一个紧弗雷歇空间的例子，它的平方不是弗雷歇空间，这是绝对性结果；萨皮诺夫斯基（B.Šapirovski）等构造出两个紧化弗雷歇空间，但其乘积不是弗雷歇空间；中国数学家王国俊证明了每个势小于2^{ω}的可数紧乌利松空间是列紧的，周浩旋则利用MA把乌利松分离性减弱为T_2；在与集论假设无关的情形下，美国女数学家拉薇（C.Navy）解决了许多集论拓扑学家十多年来一直在努力寻求答案的一个问题：她构造了许多帕拉林德洛夫正则空间不仿紧的例子；代牧民引进一类包含林德洛夫空间与可分空间的拓扑空间，得到一种相应的基数函数，他研究了这种空间的若干性质与几个包含这个基数函数的基数不等式；关于CW复形可乘性的J.H.C.怀特黑德问题，中国数学家刘应明在CH下给出了一个简单的充要条件，对这里的CH情形，周浩旋从集论角度在MA下给出了一个充要条件；同时对有限维情形，无需利用集论假设也给出了充要条件，当然，这些条件都比较复杂；周浩旋还推广豪斯多夫间隙为鲁辛间隙，在$MA+\urcorner CH$下对高基数的鲁辛间隙存在性得到许多结果，他由此讨论了$\omega^*(=\beta\omega-\omega)$的开集构造，给出了$\omega^*\approx\omega_1^*$问题的几个相容性解答；关于$\beta\omega$的性态，在$ZFC$中知之甚少，但在$CH$下却收获颇丰，其中关于$P$点的研究方面，中国数学家杨守廉等在$CH$下得到了存在不以$P$点为下界的非$P$点等若干结果。另一个方面，点集拓扑学对集论也产生了反作用，丰富了公理化集论的内容。80年代以来，布罗维曼（S.Broverman）等证明了“ω^*与ω_2^*非共绝对”与CH等价。塔尔（F.D.Tall）证明了“每个全正规局部紧空间是集体正规的”与ZF相容。代牧民证明了“每

个势小于或等于2^{ω}的有 Calibre ω_1 的T_2空间可分”也与CH等价。

V. 不分明拓扑学

在美国控制论专家查德（L.A.Zadeh）1965年创立模糊(或不分明）数学（Fuzzy sets theory）之后三年，美国数学家C.L.Chang于1968年提出了不分明拓扑空间的概念。自此，不分明拓扑学在推广型研究、分析型研究以及代数型研究等三个方向，无论在广度和深度上都得到了迅速发展。它不仅可做出与传统的精确数学水准完全匹配的工作，而且帮助人们深化了对若干数学基本概念的认识。

不分明拓扑学所面临的基本框架与通常的分明拓扑学有很大的相似性。因此，分明拓扑学中的几乎全部结果都可以推广到不分明拓扑学中来，如不分明连续映射及其特征刻划定理、库拉托夫斯基（Kuratowski）十四集定理、复盖性质及其在连续映射下的不变性等等，都是建立完整的不分明拓扑学理论进程中必不可少的组成部分。当前，分明拓扑学中最基本的概念都已推广到了不分明拓扑中（当然，这些推广并非都是成功的），而对那些较专门的理论的推广工作则刚刚开始。例如，正则开集、几乎连续、半连续映射与弱连续映射、几乎紧性、绝对闭性、S-闭性、半开集、波雷尔集以及各种意义下的近似紧性与近似连续性等基本概念和理论，都是容易向不分明拓扑学中推广的。

然而，由于不分明拓扑空间比分明拓扑空间多了一个层次结构，所以各部分理论比分明拓扑空间中的相应理论远为复杂。这主要是由不分明集与分明集的下述重大差别引起的：

（i）在分明集理论中，点是不可再分的基本单位，而在不分

明集理论中，不分明点虽然也是基本单位（即任何不分明集都可表作若干不分明点的并），但它还可再分，不分明点之间可以彼此包含。

（ii）在分明集理论中，互补律成立。即 $A\cup A'=X$，$A\cap A'=\phi$。而对不分明集互补律失效。

（iii）在分明集理论中，择一原则成立，即若一个点属于若干集合的并，则此点必属于其中某个集合。而对不分明集择一原则失效。

（iv）在分明集理论中，几个集的乘积的元素定义为各集中元素的有序组，这里没有丢掉任何信息。即是说，为使（非空）分明集的乘积相等，必须且只须各因子集相等。但在定义不分明集的乘积时，只是将其论域相乘，而不分明点的高度的决定则采取就低不就高的原则，损失了许多信息。即是说，不同的（非空）因子集相乘有可能得出同一个乘积来。因而不分明集的积集与其因子集之间的关系比较松散。

这四条重大差异的影响，使不分明拓扑学存在着丰富而新颖的研究课题。所取得的成果固然是令人鼓舞的，但目前的研究尚处于未成熟未定型的多种学术观点并存的阶段，对一些最基本的概念，如不分明拓扑空间的定义、收敛理论以及对不分明同胚的理解等方面都还有待于进一步的研究而求达到统一。

紧性是最重要的一种拓扑性质。在不分明拓扑学初期的推广工作里，是形式上照搬分明拓扑学中的相应定义来定义不分明紧性。很快，人们就认识到必须考虑层次结构来研究不分明紧性，从而充分体现了不分明拓扑学研究的特色。更为根本的新问题是，前述重大差异使邻域方法在不分明拓扑学中遇到相当大的困难。由于早期人们自然地沿用传统的邻域系进行工作，遇到了一系列阻碍而使研究停滞不前。旨在克服这一根本性困难的研究，导致了邻近构造方面的革命，其结果是中国数学家蒲保明和刘应

明的重域方法以及王国俊的可应用于更广场合的远域方法应运而生。它们取代了传统的邻域方法，在不分明拓扑学研究中获得了成功（详见下节）。

建立适宜的不分明拓扑空间中的收敛理论是不分明拓扑学发展的一个中心课题。由于层次结构的影响、邻域系方法在集论的根基上存在有严重缺陷——择一原则在不分明集论中不成立，使得收敛理论问题很复杂。自1974年 C.K.Wong 提出的收敛理论失败之后，直到1979年 R.罗文、1980 年蒲保明和刘应明、1983年王国俊才分别建立了比较完整的渗透式收敛理论、分子式收敛理论及网式收敛理论。由于这些理论实际上都是针对不分明点（或它的推广概念“分子”）而作的，因此，如何建立比较完整的、更富有应用前景的一般不分明集的收敛理论乃是一个值得深入研究的课题。

国际上以哈顿（B.Hutton）为代表的“无点化”流派的工作影响最大。他们关于不分明单位区间的构造、不分明正规性的引入、不分明一致空间理论的建立以及不分明度量化方面的较深入的工作，都是引人注目的成果。但是，由于无点化所固有的局限性以及研究对象（如不分明度量）的复杂性，使得在一些方面难以进行更深入的工作。这种局限性为以重域、远域思想为主的中国“有点化”流派所克服。

在不分明拓扑空间理论研究初期，维斯（M.D.Weiss)等人就注意到由分明拓扑空间导出的所谓诱导不分明拓扑空间，即所谓可拓扑生成的不分明拓扑空间。国内外对它作了很多研究。诱导不分明拓扑空间是以罗文等人为代表的分析学派早期所研究的一种拓扑空间。罗文证明了不分明紧T_2空间，若每个常值函数是开集，则必是诱导不分明拓扑空间。此类空间虽已被国内外学者研究得相当深入，但不足以体现不分明拓扑的真正特色。因此，近年来分析派开始转向研究非拓扑生成的不分明拓扑空间。罗文

1981 年证明了这类空间只能是紧 T_2 空间以外的空间之后，又于1983年给出了这类空间的具体例子。这是一个引人注意的研究课题。

分析派发表一系列颇具影响的文章表明，他们感兴趣的是那些“具体的”、“自然的”空间（例如n维欧氏空间R^n关于通常定义的距离$\rho(x,y)=[\sum(x_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$也是度量空间），研究的对象是与诸如实直线$R$及$R$上的概率测度、$R$上满足李普希兹条件的函数等密切相关的一类课题。1985年，罗文研究了以

$$\mu(R)=\{P|P\text{是}R\text{上的概率测度}\}$$

为论域的不分明拓扑空间$\mu<(R)$，证明了这种空间也可用类似于哈顿的单位区间那种定义方式而得到。作为$\mu<(R)$的子空间，罗文在1984年引入并讨论了不分明整数和不分明有理数等概念。由于$\mu<(R)$是具有很强分析背景的空间，因而显示了很大的发展前途。罗文等人还以新的观点——对拓扑空间的性质赋以标志其真实程度的实数$\varepsilon\in[0,1]$，研究了实直线R上的实函数间的收敛关系，针对不分明分离性提出了各种分离参数与分离度的概念，还讨论了与T_1及T_2分离性相关联的分离参数与整体分离度以及其它一些有关参数。沿此道路有大量工作可做。应当指出，各种分离性以及各种可数性、连通性、紧性等一系列性质的拓扑不变性，基于王国俊给出的放弃了纵向度量不变性的新的同胚定义：

不分明拓扑空间X与Y称作同胚，若存在序同态f：$I^X\longrightarrow I^Y$，f是一一对应，且f与f^{-1}都连续。

就都需要重新审定，从而导致进一步评价各有关定义的合理性。这是当前一个值得研究的课题。

代数型研究源于1967年戈俊(J. A. Goguen)引入L不分明集的概念，用一般的完全分配格L取代了单位区间I。1977年，哈顿在提出不分明拟一致结构理论时引入并讨论了格L的元素的

极小族概念。1983年，王国俊受蒲保明、刘应明关于重域系工作的启发，为了把重域思想应用于更一般的框架而在一种特殊的格——分子格上建立了拓扑理论，把不分明拓扑学的研究纳入了拓扑格理论之中。1981年，刘应明对完全分配格上的保并映射的交运算作了深入的研究，得出了诸如

$$(f_1 \wedge f_2)(a) = \bigwedge_{a_1 \vee a_2 = a} [f_1(a_1) \vee f_2(a_2)],$$

与

$$(f \wedge g) \circ (f_1 \wedge g_1) \leqslant (f \circ f_1) \wedge (g \circ g_1)$$

等重要公式，引入并研究了算子 Ω，为进一步研究不分明拟一致结构等理论奠定了代数基础。至此，一个与格的代数结构的研究紧密相关的新的研究学派——代数派逐渐形成。

代数派研究的主要思想是以分明拓扑学的基本理论为背景，建立一种广泛的完全分配格上的拓扑理论。它既能把分明拓扑学与不分明拓扑学作为特例而包含进去，又能充分体现不分明拓扑学层次结构的特点；它既保持不分明拓扑学丰富的研究内容，又要在较高观点的指导下抽象出纷繁的课题所共有的本质属性，从而加以简洁的处理。当前，代数派工作的成果表现于对格上映射的深入研究以及格上分子式拓扑理论的建立等方面。中国数学家对格上拓扑学的研究已取得相当大的进展，王国俊于1985年建立起了完全分配格上点式拓扑理论的总体框架，在这一相当广的框架之下，与凯利(J. L. Kelley)1955年的经典名著《一般拓扑学》的各部分内容相对应的理论之中除度量化问题与函数空间理论尚待进一步讨论外，其余各部分理论均已有了雏形，不过还远未完备。虽然在格的代数构造问题，如乘积理论（樊太和《分子格范畴中的积运算》，1986）、拟一致结构理论（孙叔豪《完全分配格上的拟一致结构》，1985）、基数不等式理论（刘晓石《格上点式拓扑的基数函数》、《格上的离散度》）以及遗传性理论等方面

都得到了一批研究成果，但尚有一系列基本问题待解决。从大的框架上讲，哈姆玻格(P.Hamburg)等人1984年讨论了I^X的完备子格上的拓扑结构，建立的理论具有一般性，但尚需继续深化。何明提出了一种更为广泛的格上拓扑理论。这里对"点"的概念放得很宽，甚至不要求点的邻近构造形成渗透或理想，同样建立了一种完整的收敛理论。

最后，应当指出不分明拓扑与格论之间是一种互为促进的关系。例如，不分明拓扑工作可以得益于连续格理论，正是在连续格理论的刺激下，彭育威和赵东升相互独立地于1986年将良紧的理论成功地推广到值域为格L情形。紧性在不分明拓扑中逐步深入在工具上与连续格理论的发展很有关系；反之，最近有一些拓扑学方面的工作也对连续格研究作出了贡献。

Ⅵ. 生机蓬勃的中国拓扑学研究

我国对拓扑学的研究，最早的是俞大维1925年在德国数学杂志上发表的一篇有关点集拓扑学的论文。中国拓扑学的开拓者是著名数学家江泽涵。他1927年留学美国，1930年获哈佛大学博士学位后在普林斯顿大学数学系任研究助教，1931年回国任北京大学数学系教授。在此期间，江泽涵在临界点理论和不动点理论方面取得了不少研究成果。他把莫尔斯(Morse)理论直接用于分析中，就各种分布类型系统地研究了区域的拓扑特征与牛顿位势临界点的型的关系。在论文《格林函数临界点的存在》中，他证明了如下定理：存在一个同胚于球体的区域，它的以一个内点为极点格林函数在它的内部确有临界点；在平面上，如果R是一个具有光滑边界的m重连通的区域，R的以任一内点为极点的格林函数在R内恰有$m-1$个临界点。

接着，周绍濂对点集拓扑学(1934)，陈省身(1936)、吴文俊(1948)对拓扑学开始了有价值的研究。陈省身四十年代开始对示性类理论和纤维丛理论进行研究，取得了一系列成果。吴文俊的博士论文被认为是对纤维空间的基本问题的重要贡献。

50年代以来，我国的拓扑学取得了新的进展。1950～1955年，吴文俊在证明紧致微分流形中斯蒂弗—惠特尼(Stiekel—Whitney)示性类拓扑不变性的基础上，又证明了模3及模4约化后的邦德里雅金(Л. Понтрягин)示性类是拓扑不变量。他对格拉斯曼(Grassmann)流形的研究也得到很好的结果，有关邦德里雅金示性类的结果正是由格拉斯曼流形中的运算与邦德里雅金平方运算导出的。他引进了一些非同伦性的拓扑不变量，借此导出拓扑空间可以实现在N维欧氏空间R^N的必要条件和$n(\neq 2)$维复合形实现在R^{2n}中的充要条件。他还确定了有可数基正规空间的维数，并证明$n(>1)$维紧致微流形在R^{2n+1}中的任意微分实现是微分同痕的。他的科学论著《示性类及示嵌类的研究》获1956年全国科学奖一等奖。在示性类及示嵌类等方面的一系列成果，被国外称为"吴文俊公式"、"吴文俊示性类"。他的多面体的嵌入和侵入工作至今仍居世界领先地位。他所提供的构造非同伦性拓扑不变量的方法，显示了独创性。60年代，吴文俊和王启明继承了戴尼斯·苏利文(D. Sullivan)在同伦方面的工作，并取得进一步成果；利用由骨架来过滤一个CW复形所得到的谱序列。吴文俊1965年发表《可剖形在欧氏空间中的实现问题》，这是代数拓扑的重要成果。自1978年以来，吴文俊发表了一系列他称之为I^*－度量的文章，发展和改造了苏利文的极小模理论，揭示了I^*－度量下较常见的代数拓扑函子，如同调函子、同伦函子等的各种优越性，对有限复形给出了有效的计算方法，并建立了I^*－度量的公理化体系和具体计算方法。这些工作使得I^*－度量的理论有可能从只能处理无挠的情形推广到有挠的情形。吴文俊于1947～1951

年留学法国，先后在法国斯特拉斯堡、巴黎、法国科学研究中心从事数学研究，1951年回国。现任中国科学院系统科学研究所所长。

廖山涛于五十年代定义了局部群和局部上积、卡积，应用这种乘积统一了流形上经典的庞加莱对偶定理。对具有以素数p为周期变换的空间X，阐明了X的模p特异同调、X与X上不动点集的模p乘法结构三者之间的关系。1958年，他证明了四维欧氏空间中任一周期变换恒有不动点。他还引进纤维丛的对称化方法来处理丛的阻碍类问题，得到球丛的第二阻碍类公式及有关第二阻碍类的相对扩充与同调分类的公式。

张素诚从1950年开始，发表了一批关于多面体和同伦不变量的论文。他发现了七种基本的$A_n^2(n>2)$多面体，这种关于A_n^2多面体分类问题的规范形式在国际上被称为张氏法形式。他开创了正则同构的代数理论研究，引入新的同伦不变量，建立了应用于范形论和上同伦群计算中的重挠率和示性多项式概念，并证明了挠率、重挠率与贝蒂数完全决定$(n-1)$连通的$(n>2)$多面体。他还独立地发现了球的约化乘积和同伦群的雅可比恒等式。80年代，他成功地运用同调运算改造了怀特黑德(J. H. C. Whitehead)的A_n^2上同调环的理论。

江泽涵和他指导下的姜伯驹、石根华从尼尔森数的估计开始，打破了不动点类理论停滞多年的僵局，取得了系统的研究成果，被国际数学界评论为一个中国学派所作的改进。我们知道，方程$f(x)=x$的一个解，拓扑学上称作映射f的一个不动点。1923年，莱夫舍兹(S. Lefchetz)引进一个整数$L(f)$，并证明了莱夫舍兹不动点定理：如果$L(f)\neq 0$，则f至少有一个不动点。1927年，尼尔森引入非负整数$N(f)$，并证明了尼尔森不动点定理：f至少有$N(f)$个不动点。从概念上看，$N(f)$远比$L(f)$深刻，但是计算上$N(f)$却比$L(f)$困难。从50年代后期起，江泽涵等人对

尼尔森不动点理论作了一系列改进。江泽涵与姜伯驹合作发表了《同一伦型的自映射的尼尔森数》，1962年，姜伯驹提出利用迹群（国外称作"姜伯驹群"）估计不动点个数的方法，对一类拓扑空间和一类映射f确定了尼尔森数$N(f)$。这一工作由美国数学家布朗(R. F. Brown)1971年出版的著作以整章篇幅作了介绍。1964年和1965年，石根华完成了两篇具有国际水平的论文《最少不动点数和尼尔森数》和《恒同映射类的最少不动点数》。国外把石根华的结果称为"石氏类型空间"和"石根华条件"。1982年，姜伯驹和石根华因不动点类理论的工作获全国自然科学三等奖。80年代初，姜伯驹建立了尼尔森式的周期点类理论，证明了：对于闭曲面的自同胚，尼尔森数恰等于同痕类中的最少不动点数；而对于负欧拉数的曲面的自映射，尼尔森数一般小于同伦类中的最少不动点数，从而否定了关于尼尔森数等于最少不动点数的猜测。姜还以微分拓扑学的观点阐明了代数拓扑学中不动点类的概念。纤维映射的尼尔森数等于纤维空间与底空间的尼尔森数的乘积的充分必要条件则是尤承业给出的。近年来，姜伯驹在曲面上不动点与"辫群"方面有突破性工作，并因此获1987年全国自然科学二等奖。姜伯驹现为中国科学院学部委员，并被聘为第三世界科学院院士。

周学光在50年代用同伦群及上同调运算，表示出$n-1(n\geqslant 4)$连通空间X的同调群$\Pi_{n+2}(x)$。80年代初，他研究了广义同调群和它的系数的关系，推广了哈托里－斯通(Hattori-Stong)等的结果。在微分拓扑学方面，周研究了几乎闭微分流形的嵌入问题，给出了K-连通几乎闭流形能整齐嵌入某些欧氏空间的一个充分必要条件及其若干具体应用。郭景美在这方面作了进一步推进。

近年来，代数拓扑学方面的主要成果还有：吴振德在一系列文章中对实数、复数和四元数的斯蒂弗流形的KO-群和J-群，以及某些透镜空间和Dold流形的J-群作了深入研究。特别的，

对复投影空间CP^n的J-群，当$5\leqslant n\leqslant 9$时，得到了完整的结论。何伯和研究了从球面到欧氏空间的连续映射，推广了波尔苏克-乌拉姆(Borsuk-Ulam)定理。虞言林将高斯-彭纳公式从可微情形推进到组合的情形。

李邦河在一系列论文中，对微分拓扑学中的微分流形M到微分流形N的侵入进行了详细的研究，发现了在流形到欧氏空间的侵入中不曾出现过的新现象，接连给出了若干个$\Pi_1(N^M, f)$作用非平凡的例子，纠正了过去的文献中的错误。他与美国拓扑学家彼特尔松(F. Peterson)合作证明了：任意连续映射f: $M^k\rightarrow N^{2k-1}$必同伦于侵入。李邦河还讨论了可平行流形的切标架场与球的同伦群中的元素的关系；给出了代数结可平行的充分必要条件以及模2米尔诺(Milnor)数的同伦不变性等。

在一般拓扑学的传统课题内，中国数学家做了许多工作。王戌堂在50年代给出了一致性空间的一个定理，引起了国内外学术界重视。1964年，他又在国际上首次提出ω_μ一度量化定理。80年代初，王戌堂解决了班克斯顿(P. Bankston)与蒙克哥维恩(J. McGovern)关于拓扑分划的一个问题，得到直线上有理点集能够拓扑分划任一自稠密的度量空间的有趣结果。高国士证明了M_1空间的拟开、可数双商、闭映射象仍是M_1空间。高智明利用σ局部有限伪基与σ闭包守恒伪基对度量化的几个著名结果作了改进。王国俊用正则闭覆盖重新定义了S闭空间，给出了简单的刻划定理并导出许多性质。

在不动点理论与线段动力系统这两个相当活跃的领域内，江嘉禾于80年代初对多值的准上半连续闭凸映射给出了一个不动点定理，推广了S. Reich与樊𰢵的结果。周作领、熊金城在廖山涛的指导下，于1981年给出了线段自映射的非游荡集等于周期点集的充要条件，透彻地解决了线段上拓扑动力系统中一个重要问题。

我国的不分明拓扑学研究队伍宏大、成绩蔚然，形成了独具特色的中国学派。特别是邻近构造的革命——创立重域、远域方法，开辟了不分明拓扑学崭新的研究方向。1977年，蒲保明和刘应明引进不分明点的一种定义，建立了它的合理的邻近构造——重域系，从而成功地得到一个完整的Moore-Smith收敛理论，并对积空间与商空间问题给出较系统的结果(1980年)。1982年，刘应明将哈顿为代表的"无点化"流派的成果与"有点化"的重域系思想结合，十分漂亮地导出了一般L不分明拓扑空间的嵌入理论。1983年，王国俊把重域的补集称作远域，从而得到更一般的形式——远域系。利用分子(既约元)的远域系结构，他又于1985年建立起了包括分子网的完整的Moore-Smith收敛理论在内的完全分配格上点式拓扑理论的总体框架。应用重域和远域思想，在不分明拓扑一系列专题研究中，成果也蔚为大观：刘应明在一致结构与嵌入理论(1982)，刘应明(1986)、梁基华(1985，1987)、罗懋康(1985)在不分明度量化问题，彭育威在函数空间问题(1985)，刘应明(1981)、李中夫(1984)、王国俊(1983)、赵东升(1986)、彭育威(1986)在紧性理论，刘应明与罗懋康(1986)在仿紧性和紧化，刘应明在诱导空间(1986)，梁基华(1983)、刘旺金(1985)在近性结构等方面都取得了重要的成果。在重域结构与收敛理论的基础上，刘应明1981年通过不分明集的边界特征来刻划紧性，推广α紧性为Q紧性。王国俊1983年通过所谓α-网的收敛性引入了较理想的不分明紧性——良紧理论。刘应明是我国不分明（模糊）数学研究领域卓有成就的开拓者之一，也是世界不分明拓扑学的主要奠基人之一。他在国内外发表高质量论文若干篇。他的研究成果在国际上也是第一流的。1980年起，他被美国《数学评论》等五种外刊聘为评论员与编委；1986年被选入在世界上享有盛誉和权威性的美国马奎斯《世界名人录》。

第十一章

现代数学发展概观之七：泛函分析

泛函分析是研究无限维抽象空间及其分析的学科。它是现代数学中发生根本性转折的最明显的表现。这种转折，堪与17世纪把变量引入数学而导致微积分的产生相比拟。它概括了经典数学分析的重要概念和方法，又渗入量子物理学、现代工程技术和现代力学的营养。它综合运用分析的、代数的、几何的方法，研究分析数学、现代物理和现代工程技术中的许多问题。它的特点是探求一般性和统一性——这是20世纪数学的特征之一。它不是孤立地考察各个函数以及联系它们的关系和方程，而是把这些对象作为一个总体来研究，即研究函数空间和它们的变换（而古典分析是研究实数集合或复数集合上的函数的性质）。泛函分析实际上就是函数集合上的函数。它具有高度抽象的方法，即能把初看起来相距甚远的问题十分巧妙地统一起来进行研究。相对于50年代的“老三高”（高等微积分、高等代数、高等几何），“新三高”（泛函分析、抽象代数、拓扑学）已成为现代数学的中心和数学研究的前沿。

Ⅰ. 泛函分析的起源

泛函分析起源于经典数学物理中的一些边值问题和变分问题。19世纪后期，数学中许多领域处理的是作用在函数上的变换或算子。算子中有一些是将函数变成实数，而不是变成函数。那些把函数变到实数或复数的算子，今天称为泛函，而算子这个名称则用来通称把函数变为函数的变换。

19世纪80年代到20世纪20年代，是泛函分析的萌芽时期。它开始于意大利数学家伏尔泰拉和品契莱尔1887年关于变分法的工作，他们引进了泛函演算，特别是引进了原始泛函以及线性算子的概念。意大利数学家C.阿泽拉又对线函数（由伏尔泰拉定义）进行系统研究，给出线性空间概念。后来法国数学家发展了泛函演算，特别是阿达玛1897年为了研究偏微分方程而考虑了区间[0,1]上全体连续函数所构成的族。他发现这些函数构成一个无限维线性空间，并在1903年定义了这个空间上的函数即泛函。

1906年，阿达玛的学生，法国数学家弗雷歇利用当时的集合论观念，力图将康托尔、伏尔泰拉、阿泽拉、阿达玛等的具体的结果以抽象的术语统一起来，在建立函数空间和泛函的抽象理论中获得了第一个卓越的结果。弗雷歇的博士论文用抽象形式归纳统一了前人结果的共同点并加以推广：(1)把函数或曲线看成一个集合或空间中的点。它们被看作一个抽象集合。(2)函数的极限可看作空间中点列的极限。有极限概念的集合称为L空间，这是后来拓扑空间的萌芽。(3)集合上可定义实函数即泛函。由于有了极限概念，就可以定义泛函的连续性。(4)泛函可以进行代数和分析运算，这就成为名副其实的泛函分析了。弗雷歇1906年还在抽象的空间中引进“距离”的观念，使之具有欧氏空间距离的性

质从而有了更丰富的结构。

几乎同时，希尔伯特对积分方程进行系统的研究。他的思想是使函数等同于傅里叶系数集。他在前人的基础上，认识到积分方程与无穷多变元线性方程组之间的相似性，积分方程的有解性与无穷多变元的收敛性条件有关。这使他实际上得到了具体的希尔伯特空间理论。

自1906年起，美国数学家莫尔开始了建立线性泛函分析和算子的抽象理论的研究工作。而第一个有影响的步骤是希尔伯特的学生、德国哥廷根学派的E．施密特迈出的。他引入实的和复的希尔伯特的几何观念。把函数看成是平方和序列的空间（抽象的l^2空间）的点，并导出正交系，建立了所谓希尔伯特空间。1907年，匈牙利数学家F．黎斯等引进勒贝格平方可积空间（L^2空间），发现其性质与l^2空间相同，两个月之后，德国数学家E．费歇尔与F．黎斯证明L^2空间与l^2空间同构，只是同一种抽象希尔伯特空间的两种具体表现。这也反映出研究抽象空间具有重要的意义。它更清楚地表明积分理论和抽象空间的泛函之间的紧密联系。黎斯1910年发表于《数学年刊》上的论文是泛函分析核心的抽象算子理论的一个良好开端。他研究积分方程仿照L^2空间导出$L^p(1<p<\infty)$空间，也就是p次方可积函数全体构成的空间，后又研究l空间，它们不是希尔伯特空间，但可以是范数。他发现了L^p上连续线性泛函全体构成一个“对偶的”空间L^q，且$p+q=1$。这样，黎斯开始了应用范数概念作为研究抽象空间的另一种方法。至此，泛函分析的基本要素已经齐备。

Ⅱ．泛函分析的创立

泛函分析正式发展成为一门学科，是20年代到40年代。赋范

空间的一般定义和公理体系是在1920～1922年间，由波兰数学家巴拿赫、奥地利数学家哈恩、德国哥廷根学派的海莱和美国数学家维纳给出的。他们的工作有许多重迭，提法上几乎完全一致，因而优先权问题很难弄清。但在这些泛函分析奠基人中，要算巴拿赫的工作影响最大。波兰数学家在第一次和第二次世界大战之间在泛函分析与拓扑学方面取得了举世公认的成就。其中最杰出的数学家巴拿赫1922年发表了本世纪最重要论文之一《抽象集合上算子及其在积分方程上的应用》，为泛函分析奠定了基础。1932年，他又出版名作《线性算子理论》，统一了当时泛函分析的众多成果，成为泛函分析第一部经典著作，它使泛函分析成为一门理论较完备的学科。巴拿赫提出完整的赋范空间概念，后称之为巴拿赫空间。巴拿赫空间论由哈恩—巴拿赫扩张定理、共鸣定理、开映射定理、闭图象定理、闭值域定理等组合构成。这些定理可推广到各种类型的局部凸拓扑空间，这不仅使分析学中许多基本问题能够用现代的方法去处理，而且使泛函分析自身的理论得到发展，为分析学的这个分支开辟了新的研究方向。而函数空间上的线性算子理论则是泛函分析的另一研究重点。巴拿赫提出的一系列重要定理，不仅成为泛函分析的重要组成部分，而且还是用于解决微分方程、积分方程、三角级数等问题的有力工具。它使分析学达到了新的阶段。而波兰泛函学派的J.肖德尔和法国数学家J.勒瑞的不动点理论是现代偏微分方程理论的重要工具。微分方程的解被他们看作巴拿赫空间到自身映射的不动点，从而得到了基本定理。这成为现代非线性泛函分析的出发点。

1926年，德国哥廷根大学的大物理学家薛定锷创立了基于微分方程的量子力学。算子在量子理论中的应用，刺激了希尔伯特空间和算子抽象理论的研究。匈牙利数学家冯·诺伊曼此时来到哥廷根，他大胆地把希尔伯特空间公理化，并把量子力学纳入严格的数学体系，使之根植于泛函分析之上。他的基本思想是：把

物理系统的状态看作希尔伯特空间中的一个“点”，使可以测量的物理量都相应于一个线性算子。他把希尔伯特空间的有界线性算子组成代数，开阔了算子代数的新分支。冯·诺伊曼的主要著作《量子力学的数学基础》至今仍是一本经典著作。与量子力学研究交织在一起的，是对希尔伯特空间上的对称算子谱论和算子环论的研究。1927～1930年，冯·诺伊曼对很大一类所谓Hermite算子阐述普遍的特征值理论，并将之推广至无界算子，从而建立了无界自共轭算子谱分解理论。1932年，他证明了L^2形式的遍历定理，并用酉算子理论进行表述，这是后来的遍历理论的开端。自1930年起，冯·诺伊曼发表了一系列关于算子环的研究论文(其中部分论文是与默里(Murray) 合作的)，熟练地将诺特和阿廷的非交换代数运用于希尔伯特空间中有界线性算子组成的代数上去，并命名为算子环（今天，人们习惯称之为冯·诺伊曼代数)。1936～1940年间，他和默里合作发表6篇非交换算子环论文，其中提出了因子的概念，其影响一直深入到今天的算子代数。他对于所谓冯·诺伊曼代数的因子进行的分类是相当完满的。冯·诺伊曼还建立了连续几何中的具有连续维数空间的公理。冯·诺伊曼的算子谱论和算子环论，是他最辉煌的成就之一，有20年之久，他一直是这个领域内无可争辩的大师。冯·诺伊曼的数学成就是多方面的，他1933年肯定地证明了紧群条件下的希尔伯特第5问题，1944年创立了对策论等等。他的科学足迹遍及除数论和代数拓扑以外的纯粹数学以及应用数学、力学、经济学、气象学、理论物理学、计算机科学、脑科学。已编辑出版的《冯·诺伊曼文集》收有论文 150 多篇，他以超人的天才和伟大的功勋而获“一代数学巨匠”的崇高荣誉。

30年代末，波兰数学家马祖与苏联数学家盖尔芳德发展巴拿赫代数理论（赋范环)，他们找出了函数空间的结构，创立交换群调和分析理论，而且通过抽象方法轻而易举地证明了古典分析中

的大定理，这显示了泛函分析方法的威力，也表明了泛函分析独立存在的价值。至此，泛函分析已正式定型，成为一门独立学科。但还相当混乱、复杂，需要做进一步的清理工作。

Ⅲ．泛函分析的成熟期

从30年代末到40年代初，泛函分析的体系已基本形成，但来源庞杂、内容混乱。如巴拿赫的书就以写得乱七八糟毫无系统而著称。法国布尔巴基学派在二次大战中及二次大战后所做的工作是很关键的。他们系统地研究了拓扑向量空间理论，推广了对偶理论，建立了广义函数论的体系，并通过结构观念把傅里叶分析推广到一般的局部紧拓扑群上，形成了抽象调和分析这门具有重要应用价值的新学科，同时还把泛函分析系统地应用于线性分析及非线性分析上。这些工作使泛函分析成为内容丰富、应用广泛的重要数学分支。

广义函数（分布）论是由布尔巴基学派第二代成员L.施瓦兹系统发展而创立的。施瓦兹是二次大战时受布尔巴基成员的影响而成长起来的著名数学家，28岁时（1943年）取得博士学位，30岁以后任法国南锡大学教授。在读大学时，他就反复考虑过一些特殊的病态函数，特别是狄拉克在量子力学中引进的著名的δ函数——它是广义函数论的前身。δ函数在0处取值无穷大，在非0处取值0，而从$-\infty$到$+\infty$的积分值为1。施瓦兹曾多次企图把这个被数学家所不承认是函数的、但在量子力学中却又经常碰到、确实有用的东西，纳入正规的数学理论。然而用老式的理论使他未达目的。在二次大战即将结束之际，施瓦兹得出了一般泛函空间中对偶性的完整理论。后来他发现这个理论可以被看作是广义函数论的入门钥匙。1945年，施瓦兹独立地发现了苏联数学家C.

Б. 索伯列夫1936年研究偏微分方程解存在性问题而引入的广义函数，而且令人满意地把傅里叶变换推广到这一函数上。战后，他又找到了刻划广义函数所需要的泛函工具。这样，施瓦兹将前人的思想发展为一种统一和完整的理论，并引入许多新的定义和结果（如张量积和广义函数的卷积等），形成了广义函数论体系。之后，他又和他的学生继续不断发掘广义函数论的潜在威力，使这一具有巨大自由性和普遍性的理论体系在数学分析、特别是线性分析中占据了中心地位，并成为整个数学体系中不可缺少的工具。1950～1951年，施瓦兹出版划时代著作《分布论》。这方面的巨大功绩，使他荣获1950年第二届菲尔兹奖，从而成为获得这项最高国际数学奖的头一位布尔巴基成员。迪多内评价说，施瓦兹对广义函数论所起的作用正如牛顿、莱布尼兹在微积分历史上的作用一样。

对拓扑向量空间的研究始于迪多内和施瓦兹，在此基础上作系统研究的是格罗申第克。他们的工作改变了二次大战之前泛函分析只研究希尔伯特空间、巴拿赫空间及其算子的状况。特别是格罗申第克引进了最接近有限维空间的抽象空间——核空间理论，对广义函数论中许多现象都可以作出清晰的解释。他还引进张量积这个非常重要的工具。格罗申第克在五十年代中期之前都在从事于泛函分析研究，他的卓越工作和巴拿赫的工作给泛函分析这个数学分支留下了最强的标记。

另一项泛函分析的重大发展是美籍匈牙利物理学家威格纳创立的群表示论，经过数学家和物理学家的合作，发展为一套完整理论，它在核结构、基本粒子理论以及数学其它分支中有广泛应用。30～40年代，美国数学家希尔与日本数学家吉田耕作发展了半群理论，成为泛函分析一个有很大应用价值的重要分支。

Ⅳ．泛函分析的最新进展

50年代以来，对别的一类线性有界算子的谱分析研究又有了较多进展，但也有很多基本问题尚未解决。对全连续算子的谱分析理论研究作出贡献的有冯·诺伊曼，他首先研究维复巴拿赫空间的特殊情况——无限维希尔伯特空间上每个全连续算子有非平凡的不变子空间。其后，波兰数学家阿隆查恩和K．史密斯1954年对一般的复巴拿赫空间上的全连续算子证明了非平凡的不变闭子空间的存在性，但证明过程较复杂。1974年，苏联数学家B．H．罗蒙诺索夫用不动点原理证明了全连续算子不仅有非平凡的不变子空间，而且有非平凡超不变子空间，他所引进的方法简单而巧妙，结论也强得多，以“罗蒙诺索夫技巧”著称于世。芬兰数学家恩弗罗（Enflo）1973年在一篇很长的论文中，用构造性方法举例证明存在无限维可分的、非自反的巴拿赫空间，其中有这样的算子，其一切不变子空间都是平凡的。“恩弗罗反例”解决了巴拿赫1932年提出的一个老问题：任何一个巴拿赫空间中是否存在“肖德尔基”，即元素（x_1，x_2，…，x_n，…）作为基，使得每一元素x可表示为$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$，$\{a_n\}$是一列数。S．布朗利用函数代数和复分析共形映照的方法证明了次正常算子必存在不平凡不变子空间。他的方法被皮尔舍（Pearcy）、阿坡斯托尔(Apostol)等人发展成为“S．布朗技巧”，并用它证明了某些类算子存在有非平凡的不变子空间。

苏联数学家索伯列夫（Соболев）引进了多变量可微函数空间概念。中国数学家曾远荣在本世纪30年代泛函分析正在形成独

立分支时，就引进并研究了任意维数的实、复或四元数体上的线性空间的有界线性泛函数的表现，无界自伴算子的固有值等问题，所得到的一些结果早于F．黎斯等当代最著名数学家的结果。1942年他在巴拿赫空间及内积空间中引进广义直交系概念，得到了极好的结果。五十年代，曾远荣在内积空间方面，引入矛盾方程逼真解与线性算子广义迹概念，并在双直交系方面获得较强的具体结果。冯康提出广义函数的新处理形式，研究了广义梅林交换，对其中最常见的基本空间K，E，S的自反性给了初等证明。江泽坚等在拓扑线性空间研究中，结合古典的共鸣定理引入（BS）空间概念。丁夏畦系统地研究了可微函数空间，得到各种类型的嵌入定理，补正了哈代－利特尔伍德的一个经典不等式证明。丁夏畦还应用自己所建立的函数空间理论，解决了强非线性变分原理中拉登任斯卡娅提出过的一个问题。陈文嫄等研究了巴拿赫空间及其线性算子理论，于1958年完全解决了H在L^2（G）中考虑是否由L^2到L^p中的有界线性算子的问题。

在非正常算子理论方面，夏道行自60年代以来取得了一系列成果，对美国数学家的研究也产生了影响。他提出了“半亚正常算子”的概念，建立了它的奇异积分模型，又给出了用广义记号算子（一种正常算子）的谱来决定亚正常算子谱的定理和用广义记号算子决定半亚正常算子谱的定理。他还得到了关于半亚正常算子谱与特普利茨算子谱的关系。他和李绍宽得到了关于亚正常算子和半亚正常算子的谱映照、谱投影和谱分割的定理。品刻斯（Pincus）及夏道行建立了关于亚正常算子、半亚正常算子的主函数、精刻函数和迹公式理论。夏道行还得到了关于可微分变换群拟不变测度的拉东尼可丁导数的一般形式，并作出了另一类基本的既约酉表示。将这些表示用于点过程，局部流代数，解决了盖尔芳德、夏甫所提出的有关问题。夏道行还早在60年代就对

无限维空间上的测度和积分开展了系统的研究，1964年出版的专著《无限维空间上测度和积分》1972年在美国被译成英文出版。

卡雷(Carey)和品刻斯证明了几乎正常的次正常算子的主函数必是整数值的。他们又系统地研究了几乎交换的酉算子对，并且把几乎正常算子的主函数、指标理论与几何测度论及函数代数理论紧密地联系起来得到一系列结果。沃伊卡勒斯卡(Voiculescu)证明了具有有限重复度的几乎正常算子经过希尔伯特一施密特摄动后，它的品刻斯主函数或赫尔顿一霍维（Helton-Howe）测度不变。赫尔顿及霍维得到了多个几乎交换算子的迹公式，并紧密地联系于伪微分算子或奇异积分算子。

江泽坚等研究巴拿赫约化问题，取得一系列结果。王声望对广义谱算子和涅梅茨基（Немыцкий）算子的研究，吴从炘关于核空间的研究，郭大钧关于非线性积分方程的研究，林群关于算子方程近似解的研究，田方增、阳名珠把算子谱理论应用于中子迁移方程的研究，张恭庆关于分歧点理论在非线性偏微分方程中的应用，对乌雷桑（Урысон）算子的研究和非线性算子拓扑度的研究以及对偏微分算子的研究等等，都取得了相当好的结果。

严绍宗对不定尺度空间上的酉算子和自共轭算子建立了准确模型，并用它解决了谱分析中的一系列问题，给出了压缩算子的一种结构及一切酉扩张等。同时，他还得到“极·积算子”的一系列结果，使得沉寂多年的这方面理论有了进展。

华裔美籍数学家樊𪨶建立了算子式的的皮克（Pick）引理，沃伊卡勒斯卡又发展了希尔伯特空间上算子经模理想算子摄动后的系统的理论。约翰逊（Johnson)、马留雷（Maurey)、斯契克特南（Schechtnan）和查弗雷瑞（Tzafriri）等人用概率论方法研究巴拿赫空间的结构，得到巴拿赫空间、Orlicz空间的对称结构的一系列结果，从而引起国际数学界注意。盖尔芳德等人对辛

结构的代数研究、有关的哈密顿算子理论和一套形式变分理论，也是很令人注意的结果。

在C^*代数领域，不少数学家在分类问题方面，取得了很多好结果。沈昭亮用泛函维数群的工具对一类C^*代数进行分类。道格拉斯等人对C^*代数的扩张及K同调理论作出了新发展，并以之研究流形上椭圆型微分算子的指标理论。蔡文瑞研究了C^*代数间的正线性映照，李炳仁对实C^*代数及张量积得到一系列结果。国外近年来对C^*代数上KMS态的研究较活跃。和叶状结构相关联的C^*-代数的研究及C^*代数的K理论研究呈现出富有生命力的发展趋势。此外，雷卡特（Rickart）近年来对函数代数进行深入研究，一系列结果是很深刻的。

法国数学家康奈斯发展了一种非常抽象的非交换积分，引起了广泛注意。这种积分与W^*算子代数，分叶及非紧致流形上微分算子的指标理论有着密切联系。康奈斯（Alan Connes）是法国当代著名数学家，25岁(1973年)时在著名算子代数学家迪思米埃指导下以论文《Ⅲ型因子的分类》取得法国国家博士学位，“因子”是冯·诺伊曼代数中的重要概念。康奈斯现为法国科学院院士。他的主要工作是阐明了Ⅱ型和Ⅲ型冯·诺伊曼代数的构造。冯·诺伊曼自30年代开创了算子代数这个领域后，曾研究了怎样把所有算子环按照同构与否进行分类的问题。构造Ⅱ型或Ⅲ型代数的标准方法是从一个遍历地作用于一个测度空间上的群（例如圆周上的无理旋转)开始，这是泛函分析几何侧面的反映。康奈斯的工作一直以大得多的深度研究这个几何侧面。他特别考虑了李群在流型上的以及更一般地在叶状结构上的光滑作用，并且把代数分析精密化了使得能够考虑可微函数(而不仅是可测函数)。康奈斯在其博士论文中把“因子”分成三型五类：Ⅰ型（I_n，I_∞），Ⅱ型（I_1，I_∞），Ⅲ型。当时对Ⅱ、Ⅲ型因子分类很不完全。康奈斯引进S不变量并利用它把Ⅲ型代数分成子类Ⅲ_λ

$(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，然后进一步把这些代数归结为Ⅱ型代数及其自同构。接着，他又对Ⅱ型代数的外自同构进行了系统归类，使这个极其困难的问题完满解决。而且，康奈斯还意想不到地发现冯·诺伊曼代数与K理论、指标定理、叶状结构、微分动力系统等有密切联系。

1983年，康奈斯荣获国际数学界最高奖——菲尔兹奖，时年35岁。

近20年来，非线性泛函分析研究处于稳定增长的状态，取得长足进展。非线性映象的不动点理论、非线性算子、积分与微分方程的求解问题，有序空间中方程的正解、正解个数及固有值问题都是目前正在迅速发展的部分。这些问题的深入研究不仅对非线性泛函分析的基本理论的发展有重要意义，而且对解决来自物理、化学、生物、工程、人口增殖、系统科学等应用科学中的问题提供了有力的工具。

关于非线性映象（包括随机型）的不动点理论，美国、加拿大、意大利、以色列、英国、罗马尼亚、波兰、南斯拉夫、日本、印度等都有一批数学家致力于此课题的研究，而且十分活跃。研究文章在各类杂志上大量涌现。国内主要有四川师范大学、四川大学等正在进行各具特色的研究。特别是与增殖映象，单调映象和非线性半群理论密切相关的非扩张映象理论、不动点的存在性、不动点性质、不动点的构造都是主攻课题，当前发展非常迅速，但许多关键仍未解决。

提供在无限维空间内的非线性（随机）算子、积分、微分方程的新解法也是当前国内外广泛研究的课题之一。特别是随机方程的求解问题，开始出现迅速发展的趋势。关于序空间内非线性算子方程、积分方程、微分方程的正解、正解个数，解集结构以及与此密切相关的拓扑度理论，四川师范大学、山东大学、兰州大学、科学院数学所以及美国、苏联、英国、罗马尼亚、波兰、德国等许多国家的学者正在进行专题研究。

第十二章

现代数学发展概观之八：概率论与数理统计

I．概　率　论

（1）概率论基础

概率论的起源，可追溯到17世纪中叶法国数学家帕斯卡与费尔马在来往信函中讨论狂热赌徒德梅尔请求解决掷骰子游戏的数学问题：两赌徒在一场赌博中，一个已赢了$N<M$回，另一个赢了$P<M$回，原来规定首先赢得M回的人将赢得整场赌博，试描述两赌徒输赢的分布。帕斯卡、费尔马以及荷兰数学家惠更斯给出了不同的解法，惠更斯1657年发表了关于概率论的早期著作《论赌博的计算》。这些学者都认识到研究随机事件规律性的重要性，当时的工具主要是排列组合理论。之后，由雅各·贝努里及其侄子丹尼尔·贝努里、棣莫弗、贝叶斯、蒲丰、勒让德、拉格朗日、拉普拉斯、高斯、普阿松等研究发展，逐渐充实其内容。它的观念和最初的方法是从机会对策的问题中发展出来的，到19世纪由于自然科学的发展才使概率论越出机会对策的框架。

最简单的概率模型是瑞士数学家雅各·贝努里建立的“贝努里概型”，即如果一般某事件A出现概率为p，不出现的概率为q

$=1-p$，则在n次试验中，A出现m次的概率为$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$。1812年，拉普拉斯发表第一部近代古典概率论专著《概率的解析理论》，这部先驱性巨著集古典概率论成果之大成，并开创了用分析方法研究随机现象，导入了拉普拉斯变换，建立了一些基本概念如“事件”、“概率”、“随机变量”、“数学期望”等，从而完善了古典概率论的结构。

拉普拉斯所给出的古典先验概率定义虽然在整个19世纪被广泛接受，但是由于他未予探讨这一理论和应用的基础而缺少数学的严密性，所以1920年以前的概率论呈现出的是一幅相当混乱的图象，甚至连庞加莱和波雷尔这样的大数学家也没有能在令人满意的基础上给出衔接严密的理论。虽然俄罗斯学派的切贝晓夫、马尔可夫和李雅普诺夫的研究是非常严密和高水平的，但在当时除俄国本土之外还鲜为人知。英国经济学家凯雷斯（J. M. Keynes）1921年在评论古典概率时说：“对科学家说来，它有一点占星术和炼金术的味道。”德国数学家冯·米塞斯（von Misses）1919撰文说“今天，概率论不是一门数学学科”。

自然科学的发展要求不能再不加鉴别地应用古典概率定义，不能总是假定出现的事件是有限的与等可能的。经过拉普拉斯之后一百余年的缓慢发展，描述性的统计定义发展起来。本世纪初，一些数学家试图在统计频率比的性质的基础上给概率一个定义。1919年，冯·米塞斯对概率论基础作了考察，基于观察大量现象的集体而提倡经验概率论。他考虑了在类似条件下所做的一系列独立试验，假定观察到的各个事件的频率存在有极限值，且对任意选择的试验的子序列，这些极限值不变。他把概率理论看作是某一类可观察现象的数学模型。冯·米塞斯的这种定义也引起了争论，法国数学家勒维（P. Lévy）就持根本不同的观点。1926年，瑞典数学家克拉美(H. Cramér）发表论文赞同冯·米塞斯的观点并做了进一步的阐释。冯·米塞斯于1931年提出了样本

空间的概念。这些可视为关于概率理论基础研究的先驱性工作。

概率理论新纪元的开始，以1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫的划时代著作《概率论的基本概念》出版为标志。19世纪以后流行的数学公理化潮流，使人们开始注意概率论的公理化，进行了各种尝试，勒贝格在20世纪初创立的测度论和积分论给概率论的研究提供了新的手段，柯尔莫哥洛夫集前人之大成最终获得巨大成功。在这本书中，柯尔莫哥洛夫提出了概率论的公理化结构，明确了概率的定义和概率论的基本概念。他把这些概念与现代集合论、测度论和泛函分析联系起来，开创了测度论的概率论。柯尔莫哥洛夫的方法是从概率的一些主要性质着手，这些性质无论是建立在经典的定义上还是建立在统计的定义上都有效。因此，柯尔莫哥洛夫创立的公理化结构包含了经典和统计的两种定义，而且还满足现代自然科学和工程技术的严格要求。

柯尔莫哥洛夫奠基的抽象理论设计了某些可观察到的事件类的数学模型。这一理论的基本概念就是概率空间(Ω, A, P)的经典概念。其中，Ω是基本事件w组成的空间，A为Ω中集合的一个σ代数，P是对所有A可测事件有定义的一个概率测度。

柯尔莫哥洛夫著作中给出的主要命题之一是：对给定一个有限维分布族，如它满足相容性条件，则存在一个与给定分布相对应的随机过程。此外，函数$x(t)$属于函数空间X中集S的概率，由所有X中的波雷尔集的有限维分布唯一决定的。这个方法奠定了研究随机过程的严密基础。然而，不久人们发现有趣的函数集并不都是波雷尔集，其概率也不是唯一地被有限维分布所决定(例如Wiener过程和Lundberg风险过程)。立足于柯尔莫哥洛夫所建立的基础之上，1934年，帕利（R. Paley）和维纳给出了Wiener过程的一个可能的修改，同样的方法也适用于风险过程。对于一般情形，法国数学家杜布进行了深入研究，并收入他1953年的名著中。

自1933年之后，概率论成为一门严谨的现代数学分支，它的思想渗入各个学科，成了近代科学发展的明显特征之一。

30年代被称作“概率论的英雄时代”，以柯尔莫哥洛夫、辛钦、P. 勒维、杜布、费勒等现代概率论奠基者为核心的苏联学派、法国学派和美国学派从此后成为世界概率论的研究中心。

(2) 极限理论

似乎可以这样认为，概率论的真正历史始于极限理论的研究。在18、19世纪整整200年间，极限定理的研究成了中心课题，但是直到20世纪初，由于新的更有力的数学方法的引入而使“中心极限定理”获得完善的证明，这些问题才得到较为满意的解决。

在一个长时期内，极限理论的经典方面的主要任务在于找出最一般的条件。历史上最早的成果是贝努里大数定律、棣莫弗一拉普拉斯中心极限定理和普阿松逼近定理。贝努里概型是极限理论研究的发源点。历史上，贝努里第一个研究了随机变量频率$\frac{\mu_n}{n}$与概率p的偏差的概率之极限。在1713年发表的概率论历史上第一篇论文中，贝努里建立了：对$\forall \varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$。这是一大类概率论极限定理——大数定律中的第一个。

但是，对很大的n和指定的$\varepsilon>0$，要问$\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)$这一事件发生的概率是多大？贝努里大数定律是无能为力的。而法国数学家棣莫弗和拉普拉斯的极限定理则给出μ_n的渐近分布的更精确表达：

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$。这是另一类概率论极限定理——中心极限定理中的第一个。棣莫弗1733年对此定理在一个很特殊的情形下给出了证明，一般的证明由拉普拉斯给出，但他的证明是不完善的。拉普拉斯的一般性“中心极限定理”（“中心极限定理”这个术语是匈牙利数学家波利亚(G. Polya)在1920年的论文中引入的)在历史上颇为有名，比贝努里大数定律更强、更有用，其重要性远远超出了数值计算的范围。而贝努里大数定律由于它依赖于大量重复独立试验中事件出现频率的稳定性而使概率的概念才有客观意义，同时它还提供了通过试验来确定事件概率的方法，因而大数定律成为数理统计学中的主要方向——参数估计的重要理论基础之一。1837年，法国数学家普阿松引入在历史上作为二项分布的近似的普阿松分布，并给出关于二项分布的普阿松逼近定理：设在 n 重贝努里试验中，事件A在一次试验中出现的概率为p_n(与n有关)，若$np_n\to\lambda(\lambda>0$常数)，则当 $n\to\infty$ 时，$\binom{x}{k}p_n^k q^{n-k}=\frac{\lambda^k}{K!}e^{-\lambda}$，这里$K=0, 1, 2\cdots$，$p+q=1$。该定理揭示了二项分布与普阿松分布之间的关系。上述三个定理，开辟了概率论中大数定律、中心极限定理和正态分布、普阿松分布为代表的无穷分布的研究。由于拉普拉斯的证明不完善，其后一百年间许多数学家都试图给拉普拉斯陈述的一般定理找到正确的证明。第一个完善的证明是俄国数学家李雅普诺夫在1901年给出的，他使用了今天称作特征函数的解析工具。1919年，法国数学家P.勒维应邀在法国高等工艺学校讲授高斯正态分布律及误差理论，他发现概率论缺乏理论基础，便致力于这方面的研究，并于1925年发表了概率论发展中的重要著作《概率计算》，尽管在基础方面还不尽人意，但它是用数学的严密方法将这一理论作为一个整体来描述的首次尝试，其间包括了随机变量

及其概率分布和特征函数理论的系统论述，也讨论了中心极限定理和稳定的概率分布。此前，林德贝格(J. W. Lindeberg)于1922年采用著名的“林德贝格条件”，在比李雅普诺夫更一般的条件下给出了中心极限定理完善的证明，所谓“林德贝格条件”是指林德贝格1922年发现的独立随机变量序列服从中心极限定理即独立随机变量的和收敛于正态分布的充分条件。1935年，斯德哥尔摩概率小组的成员、美国数学家费勒（W. Feller）证明了原来的林德贝格条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{S_n^2}\sum\limits_{1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon s_n}x^2dF_i(x)=0$，其中 $S_n^2=\sum\limits_{1}^{n}\sigma_i^2$，$\sigma_i$ 为有限标准差。对任何给定 $\varepsilon<0$，是收敛于正态分布的充分必要条件。30年代的学者如勒维和苏联数学家辛钦等都力图找到充分必要条件，但第一个完整的解答是费勒作出的。费勒还于1949年给出独立随机变量之和的极限分布函数中关于 Nn 的强大数定律和选对数定律（费勒和维纳是西方在现代概率论方面最出色的研究者，费勒还研究马尔可夫过程，维纳研究随机过程）。

除了正态分布律以外，还有些什么分布律可以作为独立随机变量和的极限律呢？一个关于独立随机变量和极限分布的整个问题的深刻推广由辛钦在1937年给出。辛钦的结果表明，极限律远不限于正态律，但极限律的共同性质是无穷可分的，也就是对于任何自然数n，依$\Phi(x)$分布的随机变量总是n个具有同一分布律$\Phi_n(x)$的独立随机变量之和。至此，概率论中的古典极限定理问题获得了令人满意的解决。

本世纪40年代以来，独立随机变量之和的极限定理为主导的极限理论成为现代概率论的重要研究方向之一。苏联在此领域中居于领先地位，除带头人柯尔莫哥洛夫、辛钦、格涅坚科、斯米尔诺夫分别给出了该课题的著名结果外，别尔希坚开创了对相依随

机变量之和依法则收敛的研究。多布希取得了有代表性的结果：完全解决了寻求两个状态的马尔可夫链的极限分布问题。依此，非无穷可分的分布也可作为极限分布出现。普诺霍诺夫、斯柯诺霍德给出了随机过程依法则收敛三种情形的统一理论和马尔可夫过程的生成算子的收敛与依法则收敛定理。

中国数学家许宝騄是国内外数学界公认的第一流学者，他在概率论及其应用中的大部分工作，具有高度的复杂性，显示了他运用特征函数方法的完美技巧。在A. C. Berry给出古典中心极限定理的误差大小的正确的阶的估计之后不久，许宝騄于1945年给出了独立变量一个样本的均值和方差的渐近分布，在这里所适用的具有突破性的方法可用于其它许多在统计中常用到的函数。之后，许宝騄又取得了一系列为当时国际上著名概率论学者柯尔莫哥洛夫、格涅坚科重视的高水平的成果，例如他所给出的关于全收敛与大数定律(1947年)、关于可数概率的一个定理（1946年与钟开莱合作)、绝对矩与特征函数（1951年)、独立随机变数的化简系数(1951年)、矩阵偶的一种变换(1955年)、一个厄密方阵及一个对称或斜称方阵的联合变换(1957年)、独立分布的一个普遍的弱极限定理（1968年格涅坚科一柯尔莫哥洛夫著作中的附录Ⅲ）等，都是具有世界先进水平的结果。

50至60年代，把中心极限定理推广到平稳过程成为极限理论研究的一个重要方面。1956年罗森布拉特（Rosenblatt）给了一个值得注意的弱相关定义，引进随机过程“强混合”的重要概念。如果引入由Ibragimov导出的“一致强混合”，就可简化中心极限定理的证明并使得有可能推广重对数定律，Linnik和Ibragimov(1965年)、Volkonski和Rozanov(1959、1961年)、Reznik(1968年）都研究了这方面的问题。

80年代，对弱相依平稳序列或高斯序列证明类似于独立序列的各种极限定理的研究和强、弱极限以及维纳过程增量的极限性

质等极限理论的研究，仍然十分受人注意。张尧庭等讨论了非正则条件下独立同分布序列变叙中项的极限分布和吸引场。程士宏讨论了弱相依平稳序列变叙中项的极限分布问题。苏明礼对平稳高斯序列证明了类似独立同分布情形的重对数定律。林正炎与陆传荣、陆传赉合作，证明了对弱相依平稳序列的随机和也成立与非随机和同样的极限定理。林正炎将i.i.d.随机变量和的完全收敛性的结果推广到随机指标和的情形，同时还讨论了平稳鞅差序列。朱力行讨论了双指标随机变量和的大数定律，所得结果可用于讨论线性模型中最小二乘估计的相合性。于浩利用强平稳相伴r.v.序列的Berry—Esseen不等式建立了重对数律。邵启满、陆传荣对一类混合r.v.序列部分和建立的强逼近结果改进了菲力普(Philip)、斯托特（Stout）1975年的结果。邵启满还在多维强平稳混合序列的经验过程的弱不变原理中减弱了对混合速度的假设。陈桂景、孔凡超、林正炎圆满地回答了汉森(Hanson)、鲁梭（Russo）1983年提出的关于维纳过程增量的全部问题，并改进了原有结果。陈桂景、洪圣岩、胡舒合解决了Csörgo、Révész提出的问题，同时还推广了勒维的连续模定理。陆传荣研究了较广泛的一类平稳增量正态过程的增量的极限性质。孔凡超则将维纳过程增量性质的研究扩展到Brown时。

（3）随机过程的经典工作

随机过程是现代概率论最重要的分支，它产生于随时间变化的偶然性的数学模型。先驱性的工作产生于20世纪的前十年，主要有巴切列尔(Bachelier)、爱因思坦（Einstein）和朗德贝尔格（Lundberg）等引出了随机过程的一些特殊的情形。这些先驱者都使用了不太严密的数学方法，但是他们发展了直观地处理这些概念和方法的绝妙能力。1923年，美国数学家维纳发表论文《微分空间》，在函数空间中引入了一个概率测度，维纳的无限

维空间上的测度可用于研究随机过程，这就给出了布朗运动随机过程的一套严密理论，世称维纳过程。1931年，柯尔莫哥洛夫研究了一个一般的随机过程类，由于它们是经典的马尔可夫链概念的自然的推广而被命名为马尔可夫过程。柯尔莫哥洛夫证明了马尔可夫过程的概率分布满足某些函数方程，这些方程在适当的连续条件下简化为抛物型的偏微分方程，而且这些方程唯一地决定了相应的分布。费勒于1936年和1942年分别发表了关于连续过程的偏微分方程和在不连续情形下遇到的积分微分方程的论文，继续了柯尔莫哥洛夫关于马氏过程一般理论的研究，获得显著进展。至此，马尔可夫过程研究发展成一广泛的领域。

1932年，柯尔莫哥洛夫发表论文给出了一个满足某些条件的随机过程，被称为时齐的独立增量过程。Wiener过程和Lundberg风险过程可以作为一般表示式的特例导出。在更一般的条件下，不假定任何有限矩存在，勒维1934年发表论文对独立增量过程作了令人瞩目的研究，他给出了随机变量$x(t)$的特征函数经典的一般表达式。1937年辛钦给出了在某些场合更易处理的表达式。

1934年，辛钦发表具有重大影响的关于平稳过程的基础性论文，引入了平稳随机过程类。他指出当系统过去的历史对它未来的发展的预测有本质影响的情况下，马尔可夫过程是不能应用的。他给出了严格的平稳过程类的定义，建立了平稳过程理论。这个新类型的随机过程不仅为统计力学也为气象学、经济学等领域提供了合适的数学模型。尤其是为有周期行为趋向现象的研究以及应用于信息论开辟了新的可能性。1938年，赫尔曼·沃尔德（Herman Wold）讨论了离散时间的平稳过程，他证明了这类过程有一个重要的分解定理，后来他证明了这个定理经过适当修改后对更一般类型的过程也成立。1942年，克拉美研究了平稳随机过程谱表示理论，明确指出与维纳广义调和分析的关系。这实际上是给出了希尔伯特空间中U群谱表示的Stone定理的一个概

率论版本。然而，克拉美并未使用希尔伯特空间理论而是使用的随机傅里叶积分。该理论对研究随机过程具有根本的重要性。1950年，克拉美用希尔伯特空间理论讨论了一些更一般的随机过程类，给出了谱表示的一般类型的求导。1944年，柯尔莫哥洛夫研究了离散时间的平稳随机过程，这项工作的重要性在于说明了希尔伯特空间及某些其它类型的空间的抽象理论是怎样被应用于随机变量和随机过程理论的，这对以后整个理论的发展产生了有力的影响。同时，维纳研究了与离散时间及连续时间的平稳过程的线性预测和滤波。柯尔莫哥洛夫和维纳于1942年开创了预报理论，它是平稳过程理论中占有重要地位的一个分支。1941年，日本数学家伊籐清（Kiyosi Itô）一般地定义了从可加过程所导出的多重随机测度和多重随机积分，从而创立了随机积分理论，随之而来的是随机微分方程和随机微分几何、向量值的随机过程，并获得重大进展。伊籐清及苏联数学家杰尔凡德于50年代前期开创了广义随机过程研究。其后，伊籐清对扩散理论、布朗运动、回归理论和随机微分方程作了极为深刻的探讨。

同时，勒维完成了可加过程理论的主要部分，并开展了对时间参数在多维欧氏空间、希尔伯特空间等上变动的随机过程的研究。日本数学家角谷静夫（Shizuo Kakutani）则首先对二维情形把马尔可夫过程与位势理论联系起来，形成战后概率论的一个重要方向。50年代，J. 杜布和G.A.哈特正式建立了“马尔可夫过程和位势理论”这个分支。

从50年代开始，随机过程理论进一步抽象化，杜布创立了鞅论。1960年，美国数学家卡尔门提出数学滤波理论，发展了随机过程在制导系统中的应用。许宝騄1958年对欧氏空间上纯间断的时齐马尔可夫过程的概率转移函数的可微性作了深刻研究，发展了柯尔莫哥洛夫、堪德尔、奥斯廷及钟开莱等著名概率论学者的结果，所采用的方法比奥斯廷的纯分析法更为初等。多布希1968

年所给出的平衡状态的一个概率模型则开始了统计力学现代概率论方法的研究。

（4）马尔可夫过程新进展

自从柯尔莫哥洛夫和费勒开创了马尔可夫过程这个研究领域之后，半个世纪来获得了十分显著的进展。近十年来，更出现了蓬勃发展的势头，产生了许多新的分支。"马尔可夫过程与位势理论"于50年代正式开辟之后，近年来被美籍华裔数学家钟开莱等学者大力发展。此领域国内过去无人涉及，70年代末至80年代初，王梓坤等人的工作，使我国在此方面的研究有了良好开端。王梓坤对高维布朗运动的末遇球面的时间与位置分布以及极大游程得到了一些重要结果。他对生灭过程的停留时间与首达时间又有新的发现，求出了生灭过程积分型泛函的分布和极限分布。他还用马氏过程来研究地极的移动，发现了地极移动的独立性时距，并求出了地极移动的预报公式。王梓坤在对马氏过程的研究中，曾提出过极限过渡法，解决了生灭过程构造问题。以后，他又围绕间断型马氏过程的分析性质、概率性质、状态分类以及积分型泛函的极限定理等作了不少工作。近年来，王梓坤又研究了连续状态马氏过程，证明了 R^d 中暂留的右连齐次强马尔可夫过程在某些条件下，必须通过一切方向绕无穷远点作无穷次徘徊后方趋于无穷。关于连续状态马氏过程，吴荣运用从属过程方法证明了R^d中对称稳定过程的σ-有限不变测度本质上是勒贝格测度。钱敏平、钱敏给出了马氏过程的熵产生率与漂移、扩散系统的关系及Einstein公式。钱敏平、龚光鲁、赵忠信研究了有界光滑区域上的条件牢杀扩散过程的极限性质。

关于马尔可夫链、马尔可夫链中的Q矩阵问题的研究，国内有较好的基础。Q过程的"侯振挺唯一性定理"曾震动国际数学界。青年数学家侯振挺为此荣获国际概率论研究卓越成就奖——

1978年度英国戴维逊（Davidson）奖。1970年，侯振挺在齐次可列马尔可夫过程构造理论研究中发展了王梓坤的极限过渡法，并提出最小非负解方法，得到了非保守Q过程的唯一性准测，成功地解决了一系列齐次可列马尔可夫过程的重要理论问题——它是40多年悬而未决的概率论难题。80年代初期，杨向群用分析方法作出了有限流出、有限非保守Q过程的构造，将Q过程的构造向前推进了一步。对特殊的一类Q过程——(Q,b)过程的构造，是熊大国用概率论方法讨论的。陈木法和郑小谷将侯氏定理推广到抽象空间。接着，郑小谷又把Q过程的定性理论推广到抽象空间。最近，吴荣、杨振明利用马尔可夫链的某些特征量得到了t前迂回过程与跨t漂移过程的有限维分布。朱成熹讨论了非齐次马尔可夫链积分型泛函的分布，把齐次情形结果作了相应推广。钱敏平、龚光鲁对给定有限马尔可夫链的大偏差函数时链的各种可能情况作了讨论。

关于可逆马氏过程与不可逆马氏过程研究。可逆马氏过程是一种对称马氏过程。国际上此领域的研究十分活跃，但可列状态空间情形的主要结果属于中国数学家。在可逆马氏过程研究上，龚光鲁、钱敏讨论了一维扩散过程的可逆性，侯振挺和陈木法建立了抽象场论，提出了有势马氏过程的新概念，它刻划了可逆马氏过程的本质特征；他们还研究了生灭Q过程和单流出Q过程的有势性、可逆性及构造，给出了有势性判准。陈木法还完成了保守有限流出有势Q过程的构造，给出了这种情形的不断有势Q过程的唯一性准则，并讨论了抽象空间中的可逆马氏过程。对不可逆马氏过程即存在环流，钱敏平、汪培庄、龚光鲁得到了深入的结果。郭懋正和吴承训研究了生灭Q过程和直线上某些扩散过程的环流分解。

关于多指标马尔可夫过程研究。最近，王梓坤对两参数Orstein-Uhlenbeck 过程就一般形状的过去求得转移概率。杨振

明证明了两参数马氏过程对很广泛类型的区域有勒维马尔可夫性。罗首军、周健伟分别讨论了两参数过程关于开集的芽（强）马尔可夫性及两参数宽过去强马尔可夫性和规则马尔可夫性。江泽培给出了各类平稳正态马尔可夫场的谱条件。

（5）抽象空间与无穷质点的随机过程

60年代中期，苏联数学家多布希等人提出了随机场，以作为研究经典统计物理平衡态的一种随机模型。它的中心问题是研究吉布斯（Gibbs）态的存在唯一性.近些年来,C.普雷斯顿所作的许多研究是有代表性的.在诞生了随机场这一概率论新分支后,作为姐妹分支的无穷质点马氏过程(又称无穷交互作用粒子系统)也相继出现。这种用马氏过程来研究平衡态的理论是多布希和F·斯皮兹尔等人于70年代提出的。与静态模型的随机场相比，这是一种随机动力模型.物理上的定态相当于马氏过程的不变测度,而平衡态相当于可逆测度。过去，随机过程研究较多的是单个粒子运动(如随机游动、生灭过程和布朗运动等)，而“无穷质点”和以往的随机过程论所研究的对象有着本质的区别。而且，它的研究以Q过程为必要基础。这个概率论新领域提出了一系列问题吸引人们去探索。比如：给出反映系统随机演化速率的速度函数，马氏过程是否存在？何时唯一？何时可逆？何时可逆测度唯一？何时遍历？国际上的研究相当活跃。国内严士健等从1978年开始从事这方面的研究，他们以场论作为基本工具，给出了自旋变相过程和其它一些过程的可逆性判准.这些判准十分简单而有效.丁万鼎和陈木法1981年证明了具有紧邻速度函数的自旋变相过程可逆的充要条件是它有势，并且吉布斯态就是可逆测度。将“紧邻”条件排除而作进一步发展的工作属于唐守正。严士健等把抽象场论推广到任意状态空间，有效地研究了一般速度函数的有势性和可逆性问题，给出了有势性的一些判准。过去文献中已有的可逆

性结果只是很特殊的情况。唐守正等用两种不同方法将二元耦合推广到n元耦合，过程的耦合是研究遍历性的一种十分有效的方法。R. A. 霍莱和D. W. 斯出克用鞅方法研究无穷质点的随机演化，给出了相当好的存在条件和唯一性条件，并证明了鞅问题的解唯一时常是马氏过程。L. 格雷对此作了较显著的改进。李世取1983年对混合型无穷质点马氏过程的有势性和可逆性研究，陈木法1986年对Q过程与粒子系统的研究都是很有价值的。

当过程不是可逆时，情况就远为复杂。这里，有一个10多年来一直未能解决的猜想——"正速度猜想"（这是一维的自旋变相过程），对其最简单的情况虽然经R.A.霍莱、D.W.斯出克、L. 格雷和T.M. 李格特等人的努力，这个猜想也只是解决了$\frac{6}{8}+\varepsilon$。不仅如此，在无穷质点马氏过程中，存在着大量的未解决问题。1985年由Springer-Verlag出版的T.M.李格特的第一本系统的专著"Interacting partcle Systems"中，就列举了约60个问题。这些问题都有相当的难度。

到目前为止，国外的工作基本上都还是处理经典的统计物理。那么，能否使用现代统计物理呢？当今统计物理最活跃的是非平衡相变，Schlögl 模型是典型例子。对这个模型的研究，国内从1979年初就开始进行，但直到1983年秋才开始取得真正的进展。先是严士健和陈木法完成了有限维情形，而后郑小谷和丁万鼎在论文《广义线性增长过程的存在定理》中完成了无穷维线性情形，同时做了相变问题。现在，陈木法已经给出了较一般的存在定理，它包括了 Schlögl 模型（非线性）等已有的全部结果。陈木法在这里综合使用了美、苏学者的方法，但更重要的是完成了Q过程耦合这一基本工具，这得益于先前关于Q过程的研究工作。对 Schlögl 模型，现已经证明了$|I|\geqslant 1$；也能够证明在某些情况下有$|I|=1$；为了证明相变的存在性，还需证明存在$|I|>1$的

情形，陈木法确信这是正确的，但尚未完成证明。最近，陈木法给出了非紧状态空间无穷质点马氏过程的两个存在定理，它们包括了绝大部分目前所讨论的情形。戴永隆、刘锡坚研究了由他们自己引进的拟近邻系统，得到了可逆性、不变测度、死光与临界值问题较完整的结果。戴永隆还讨论了可逆吉布斯场、典型吉布斯态、势与速度函数之间的关系。特别地，对给定的势刻划它的全部可逆场、典型吉布斯态以及求出全部具有同一势的速度函数。严士健、陈木法提出了一个将多维Q过程问题化为一维问题的方法，给出了唯一性、常返与遍历的充分条件，并应用于非平衡系统中的过程及其耦合，郑君礼、郑小谷证明了非时齐Q过程鞅问题适定的充要条件是最小Q过程不断，耦合Q过程不断的充要条件是每一边缘Q过程不断。陈木法、卢云刚研究了跳过程的大偏差I函数的某些性质，给出了可配称跳过程的大偏差I函数的明显表达式。1986年，陈木法的专著《跳过程与粒子系统》出版，系统地总结了近年来关于抽象空间Q过程和无穷质点马尔可夫过程的研究成果。

目前，“随机环境中的随机过程”、“多指标（多参数）随机过程”等领域的研究十分活跃。而“量子概率”则是概率与物理另一个值得注意的方向，它已不是柯尔莫哥洛夫公理意义的概率论了。

(6) 鞅论与随机分析

鞅论是随机过程理论的进一步抽象化，自杜布于1950年创立之后，鞅已成为分析学研究的重要内容，在此基础上发展的概率论实际上是一种抽象的分析。经典鞅论在解决随机过程问题中有重要的应用，而鞅论中的H^p理论自70年代以来取得了突破性进展。1970年，Burkholder-Gundy-Silverstein从鞅论观点出发，借助布朗运动，首次发现函数属于H^p空间只需通过它的实部的某

种极大函数属于L^p空间便能刻划出来，1972年，C.费弗曼与E.M.斯坦因把这个结果推广到多元，并指出普阿松核本质上可以被任意一个恒等逼近核所代替，有界平均振动函数空间BMO空间与哈代空间H^1的对偶关系也同时得到证明。由于人们发现通过BMO可刻划许多算子的特征，因而它愈来愈受人重视。从此，鞅论中的H^p理论作为函数论、泛函分析与概率论互相结合的产物迅速发展起来。此外，C. Herz 70年代关于方差函数$\sigma(f)$与面积函数$s(f)$刻划的鞅的其它空间的工作，与利特尔伍德—帕利（Littlewood-Paley）在本世纪30年代对经典分析的工作有深刻渊源。人们借助函数论思想获得了H^p鞅论的许多结果，反过来鞅的简明性能十分明显地表现出空间（如BMO）在鞅中的特性，导致了函数论的深入结果，例如在鞅论中发现的“*good*λ”不等式推广到调和分析成为一有力的工具，乌齐雅玛(Uchiyama)近年来构造地证明了费弗曼—斯坦因的BMO分解定理，就是由三进鞅过渡到R^n的。

近年来，随着随机过程一般理论与鞅论的发展，在随机过程理论研究中出现了一个广泛的新领域——随机分析。这方面的许多重要成果是法国、日本的学者得到的，P. A. 麦叶尔、伊籐清及其同事们的工作尤为重要。国内八十年代以来进展较快。严加安在鞅论与随机积分的许多方面开展了研究，用较为“初等”的方法来规定半鞅的随机积分，并证明了积分的各种重要性质，大大简化了麦叶尔和雅可德（Jacod）原来的工作，他还讨论了可选过程的积分问题。指数鞅一致可积性条件是鞅论中讨论较多的问题之一，严加安得到了一些新的充分条件，包含了这方面已有的如苏联数学家诺维可夫等人的工作，而且在方法上也有很大改进。严加安还引进半鞅可料表示性的概念，并刻划了存在这种表示的条件。局部时研究原来只对布朗运动展开，近年来尤尔(Yor)、阿泽玛（Azêma）等人开始讨论连续局部鞅局部时的性

质，郑伟安、何声武把局部时与轨道性质联系起来并证明了连续局部鞅由它的初值和局部时唯一确定。严加安给出了半鞅局部时的几个公式。1986年，何声武、汪嘉冈在σ域族有弱可料表示性的假设下给出了σ族为拟左连续、全连续及有强可料表示性的充要条件，推广了他们原来对独立增量过程及跳跃过程的结果，马志明研究了成对输入输出排队系统的标值点过程模型；证明了两个无公共跳的跳跃过程独立的充要条件及一类排队系统最优控制的存在定理。黄志远证明了一般拓扑可测空间中随机重积分的Fubini定理；他还和廖玉麟证明了平方可积鞅空间中的随机积分算子是稠定、闭自共轭算子，并得到谱分解式。

在随机微分方程研究方面，1974年，苏联数学家皮普契尔（P. Ш. Липиер)、西里亚耶夫（A. H. Ширяев）系统地论述了由微分方程给出的过程的滤波的近代发展。1980年，严加安利用Mèmin的方法研究了相当一般的关于半鞅的随机微分方程解的存在、唯一和稳定性问题。1986年，严加安又给出了鞅部分连续的半鞅的随机微分方程的比较定理。俞中明讨论了随机微分方程和差分方程的稳定性，刘文雄讨论了Vottera型随机微分方程的解的存在唯一性，胡宣达研究“伊藤清方程”解的不稳定性，给出q-不稳定性、指数q-不稳定性及几乎必然指数不稳定性的比较准则。

关于随机控制与概率度量空间研究。司徒荣讨论了系数可以远远大于线性增长，不满足李普希兹条件，扩散系统可退化的非线性随机系统(一维连续系统、多维带普阿松跳、多维椭圆边界）的轨道唯一的强解存在性及按轨道唛唛控制的存在性。吴占生对一类带跳的扩散系统在部分观察下证明了最优控制的存在性。丁协平研究了随机压缩与随机算子方程解的存在唯一性及近似解。张石生讨论了E空间中的随机算子并用来解决B空间算子方程解的存在唯一性。周志群引进几乎概率度量空间并讨论了它的拓扑

性质。

概率论与分析、几何的相互作用的研究，国内近年来取得出色成果。郑伟安在随机微分几何与随机力学及数理统计基础、鞅论、测度的弱收敛等领域做出了不同凡响的工作，特别是在微分流形方面的某些结论，被国际同行学者称为"郑氏定理"，相应的数学推导过程称作"郑氏过程"。他的论文《黎曼流形上鞅的收敛性》荣获首届"许宝騄统计数学奖"。

1983年，马利雅文（P. Malliavin）引进算子L——它是无穷维 Ornstein-Uhlenbeck 过程的无穷小算子，来刻划密度函数ψ_k，经D. W. Stroock发展而称作Malliavin-Stroock方法，这种方法比较自然、直观。马利雅文随机变分学最先应用于亚椭圆研究。1985年，S. Kusuoka和D. W. Stroock在他们的长篇论文"*Applications of Malliavin Calculus*"中，对Hörmander 算子给出了至今为止最一般的亚椭圆性的充分条件，并在一种特殊情形下得到了充要条件。使用马利雅文随机变分学，比斯马特（J. M. Bismut）1984 年给出了阿蒂雅-辛格尔指标定理和莱夫希兹不动点公式的概率证明；他还给出Witten和阿蒂雅关于Dirac算子指标的轨道积分表现想法的严格证明，并讨论了陈省身示性类的某种推广。马利雅文随机变分学除了应用于分析、几何和随机控制外，还应用于统计物理。例如，霍莱和Stroock 曾用它研究了连续型Ising 模型（由E. Ising 1925年提出，物理学家和数学家对它作了大量研究）有限维分布的密度的存在性。马利雅文随机变分学是概率与分析、几何相互渗透的典型例子，它和前面介绍的作为概率与物理相互渗透的典型例子的无穷质点马尔可夫过程是当前概率论迅速发展的两个侧面。

综上所述，近十来年概率论发展的主要特点是：它与物理（特别是统计物理）和数学其它分支之间的相互渗透。这正如1982年《美国数学研究评审小组报告》中指出的："利用吉布斯态概念

将抽象概率引进统计力学和材料力学，将动态系统理论和遍历性理论应用于湍流的研究，这是新近数学进入物理学的两个重要例子。这些现象表明，抽象数学和应用数学正在相互接近，两者之间的相互作用正在产生着丰硕的成果。"法国国家科研中心1981年形势报告《数学与数学模型》指出："概率的技巧出现于越来越多的分支：当然有统计学，还有偏微分方程，泛函分析与巴拿赫空间的几何，微分几何与流形上的分析，动力系统，等等……。"目前，国内概率论方面正在开展的研究就有20个不同的方向，涉及面相当广泛。前面所介绍的仅只是其中一部分。业已取得的大量成果表明，我国概率论研究正在逐步赶上世界先进水平。

Ⅱ. 数理统计学

相对于其它许多数学分支而言，数理统计学是一个比较年轻的数学分支。多数人认为它的形成是在20世纪40年代H.克拉美的著作《统计学的数学方法》问世之时，它使得1945年以前的25年间英、美统计学家在统计学方面的工作与法、俄数学家在概率论方面的工作结合起来，从而形成数理统计这门学科。它是以对随机现象观测所取得的资料为出发点，以概率论的理论为基础来研究随机现象的一门学科。它有很多分支，但其基本内容为采集样本和统计推断两大部分。发展到今天的现代数理统计学，又经历了各种历史变迁。

统计的早期开端大约是在公元一世纪初的人口普查计算中。葛朗特（J.Graunt）使用调查员调查伦敦市死亡人数(1662年)，是历史上最早出现的统计推断。帕蒂（W.Petty）、苏士米赫(J.P.Süssmich）等沿袭葛朗特的方法，形成了流派。他们注意到由大量观察结果的规律性，强调了它的统计意义。到18世纪，统计

才开始向一门独立的学科发展，用于描述表征一个状态的条件的一些特征，这是由于受到概率论的影响。现在我们所理解的统计推断程序，最早的是贝叶斯方法。高斯和拉普拉斯应用贝叶斯定理讨论了参数的估计法，那时使用的符号和术语，至今仍然沿用。在统计学借助于概率论理论发展的同时，人们逐渐认识到统计在政府工作中的重要性，各国都设置了统计机构。其间，奎特尔特(L.A.J.Quetelet)曾致力于比利时的国势调查及组织国际统计活动，他提出的所谓“平均人”的概念，成为“总体”这一概念的萌芽。最初的一个重要统计论据出现在19世纪的地质学中，莱尔(C.Lyell)1830～1833年出版三卷《地质学原理》，采用类似于数理统计的方法，定出了沿用至今的关于地层中化石种类的名称。英国堪称数理统计的发源地和研究中心。生物学家嘎尔顿(F.Galton)在遗传研究中为了弄清父子两辈特征值的相关关系，揭示了统计方法在生物学研究中的应用。他引进回归直线、相关系数的概念，创始了回归分析。继后，英国的K.皮尔逊(K.Pearson)进一步发展了回归与相关理论，成功地创建了生物统计学，并得到了“总体”的概念。1891年之后，皮尔逊潜心研究区分物种时用的数据的分布理论，在《机遇的法则》中提出“概率”和“相关”的概念。接着，又提出标准差、正态曲线、平均变差、均方根误差等一系列数理统计基本术语。皮尔逊致力于大样本理论的研究，他的x^2-检验法(1900年)是假设检验最早、最典型的方法，他在理论分布完全给定的情况下求出了检验统计量的极限分布。1901年，他创办《生物统计学》杂志，使数理统计有了自己的阵地。这是数学20世纪初叶的重大收获之一。1908年，皮尔逊的学生戈赛特(Gosset)发现了Z的精确分布，创始了“精确样本理论”。他署名“Student”在《生物统计学》上发表文章，改进了皮尔逊的方法。他的发现不仅不再依靠近似计算，而且能用所谓小样本来进行统计推断，并使统计学的对象由集团现象转变为随机现象。

现在“Student分布”已成为数理统计学中的常用工具，“Student氏”也是一个常见的术语了。当然，戈赛特推导t分布的方法是不完善的，费歇尔利用n维几何方法即多重积分法才给出了完整的证明。

英国实验遗传学家兼统计学家费歇尔(R.A.Fisher)，是将数理统计作为一门数学学科的奠基者。他在本世纪20年代首开先河，致力于农田试验的设计工作。费歇尔开创的试验设计法，凭借随机化的手段成功地把概率模型带进了实验领域，并建立了方差分析法来分析这种模型。费歇尔的试验设计，既把实践带入理论的视野内，又促进了实践的进展，它将一切科学试验从某一个侧面“科学化”了，从而大量地节省了人力、物力。试验设计这个主题，后来为众多数学家所发展。费歇尔还引进了解消假设和显著性检验的概念，成为假设检验理论的先驱。他考察了估计的精度与样本所具有的信息之间的关系而得到信息量概念，他对测量数据中的信息、压缩数据而不损失信息、以及对一个模型的参数估计等贡献了完善的理论概念，他把一致性、有效性和充分性作为参数估计量应具备的基本性质。同时还在1912年提出极大似然法。此方法不需要假定有关先验概率的信息，因而具有重大意义，它克服了贝叶斯定理进行推断时需要假定这种信息存在的致命弱点。费歇尔对这种估计理论在50年代以后全面展开和深入发展打下了基础。关于x^2检验，1924年费歇尔解决了理论分布包含有限个参数情况，基于此方法的列表检验，在应用上有重要意义。费歇尔对统计推理的哲学有强烈的信念，反复阐述，公开挑战。本世纪30年代，他提出“信仰推断法”，引进了“可信分布”，在统计学界引起了相当大的兴趣和争论。由于它并不属于目前普遍采用的柯尔莫哥洛夫公理体系，其意义、解释、计算规则等至今缺乏明确而严格的系统理论。因而要发展成为一个普遍而有效的理论，还需做很多工作。费歇尔给出了许多现代统计学的基础概念，

思考方法十分直观，他造就了一个学派，在纯粹数学和应用数学方面都建树卓越。但费歇尔的思想在数学上也存在有缺点，例如他提出了直观的检验程序的方法而却未提出判断这些程序优劣的准则。

给出判断检验程序好坏标准的是著名英籍波兰统计学家J·奈曼(J.Neyman)和英国统计学家E·S·皮尔逊。他们在从1928年开始的一系列重要工作中，发展了假设检验的数学理论：提出了似然比检验，考虑了一个与解消假设相对立的备择假设，引进了检验功效函数的概念，以此作为判别检验程序的准则。这种思想使统计推断理论变得非常明确了。奈曼—皮尔逊假设检验理论提出和精确化了一些重要概念，把检验问题明确作为一个数学上的最优化问题，这可视为沃德的判决函数的先声。A·沃德在二次大战前对似然比检验的大样本理论作了较深入的探讨。奈曼—皮尔逊理论对后世产生了巨大影响，它是现今统计教科书中不可缺少的一个组成部分；在1959年出版的当代著名数理统计学家莱赫曼的权威著作《Testing Statistical Hypothesis》中，奈曼—皮尔逊理论的体系和结果占了主导地位。

1937年，奈曼创立了系统的置信区间估计理论。早在奈曼工作之前，区间估计就已是一种常用形式。奈曼从1934年开始的一系列工作，把区间估计理论置于柯尔莫哥洛夫概率论公理体系的基础之上，因而奠定了严格的理论基础。而且，他还把求区间估计的问题表达为一种数学上的最优解问题。这个理论与奈曼—皮尔逊假设检验理论，对于数理统计形成一门严格的数学分支，起了重大作用。

以费歇尔为中心人物的英国成为数理统计研究的中心时，美国在第二次世界大战中发展亦快。有三个统计研究组在投弹问题上进行了九项研究，其中最有成效的哥伦比亚大学研究小组在理论和实践上都有重大建树。而最为著名的是首先系统研究“序贯

分析”(所谓英国“战时顾问团”也同时在研究)，它被称作“三十年来最有威力”的统计思想。“序贯分析”系统理论的创始人是著名统计学家沃德，他是1938年被美国设法从奥地利的德国法西斯集中营里营救出来的罗马尼亚数学家，1938年移居美国后从研究纯粹数学转向统计。由于实弹实验的质量控制与验收抽样中节省观测的需要，沃德于1943年系统发展了早在20年代就受到Douge和Roming等人注意的序贯分析法。在经典统计中，数据只对最后结论有影响，而数据是预先确定的。序贯分析则不然，数据在这里既用来决定何时停止观测，还用来考虑对结论有何影响。沃德在统计方法中增加的停止规则的数学描述，是序贯分析的概念基础，并已证明是现代概率论与数理统计学中最富于成果的概念之一。沃德还于1949年创立“统计判决函数”理论。他第一次用集合给出了判决函数空间的明确定义；并定义了统计推断程序的风险函数，以之作为推断程序好坏的准则；他还利用先验概率和有关的贝叶斯程序，证明了完备类定理，这是在费歇尔引进极大似然估计和奈曼强调参数空间上的概率分布没有意义之后，先验概率作为统计方法已为人们完全遗弃不顾之时，所采取的方法，因而引起极大反响。沃德还将统计理论与对策论相结合，并将极大极小原理引入统计学。沃德从事统计领域的工作虽只有12年(1950年因飞机失事逝世)，但他的贡献却是如此丰富多产。他创立的序贯分析与决策函数理论，开创了数理统计学的新生面。虽然决策函数方法并未受到费歇尔的支持，但仍赢得了广泛的赞誉，特别是序贯分析法在战后获得巨大发展。在1975—1976年出版的《现代统计学索引》中，序贯分析有55篇之多。丹捷格(Dantzig，1940)、斯泰因(1945)、陈希孺(1966)、H.罗宾斯(1967)、B.埃夫朗(1971)等众多中外学者在此课题研究中都取得了丰硕的成果。世界著名的数理统计学家、美国国家科学院院士杰克·卡尔·凯佛尔(Jack Carl Kiefer，1924～1981)是沃德统计决策论

的积极倡导者，50年代后期，凯佛尔发表开创性论文“关于对称设计的非随机化的最优性和随机化的非最优性”；定义了著名的最优化准则（D-，E-，M-和L-最优性）与“随机化设计”和“非随机化设计”。60年代，凯佛尔研究了“当$P_n \to 0$时，样本分位数的迭对数模拟”、“多元随机变量和样本自由度的Skorohod嵌入”以及在极小化极大性问题、渐近最优性和各种统计检验的容许性等问题上做了许多创造性工作。1968年，凯佛尔与R.E.贝赫霍夫尔和M.索伯尔合作出版著作《序贯识别和秩评定过程》，这是凯佛尔研究领域引伸和扩大所达到的研究最高潮。凯佛尔的卓越贡献，使他成为国际上数理统计方面的权威和最优实验设计的最重要的开创人。至今，序贯分析仍是数理统计中最占优势的领域之一。项可风利用Srivastava在1975年提出的“搜索设计”的概念，研究了从正交试验出发，去给出搜索一阶交互效应的序贯设计方案。目前，专家们希望对无限问题和序贯判定问题获得更多的结果，从而最终使最优判定规则结合序贯分析和实验的统计设计成为实际判定的有益助手。因此，无论在纯数学方面或应用方面，序贯分析都有许多未竟工作。

线性模型是很重要的一类统计模型。许宝騄1941年提出了一般性回归问题的一种典约形式，在理论研究上有很大方便。塔肯和斯契夫1959年各自提出“同时区间估计”的不同方法。“岭回归”概念是60年代由A.E.霍尔提出的，他和肯拉德1970年系统地介绍了这种线性估计问题中改进LS估计的方法。线性模型的大样本理论始于60年代，葛勒塞尔(1966)、安德尔森、埃克尔、泰诺尔（1976）和陈希孺（1980前后）等分别取得重要研究结果。中国数学家陈希孺主要研究的是线性模型中误差估计的收敛性与相合性问题。在误差服从高斯一马尔可夫条件及误差的r阶矩存在$(1\leqslant r\leqslant 2)$的情况下，陈希孺给出了回归系数最小二乘($LS$)估计强收敛的充分条件，且在很一般的条件下证明了：若LS估计不为

弱相合，则别无其他的线性弱相合估计。陈桂景与美籍统计学家黎子良等一道得到了LS估计强收敛的一个很一般的充分条件，基本上包括了现在这方面已知的全部结果。陈希孺和赵林城在随机误差独立但不必同分布的情况下，得到了基于残差平方和的误差方差估计σ_n^2的强收敛的充要条件，改进了葛勒塞尔1966年的工作。陈希孺得到σ_n^2（经过标准化）依分布收敛于$N(0,1)$的理想速度$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，改进和推广了许宝騄在1945年的一项重要工作，也远远超过了Schmidt在1979年达到的成果。

非参数统计自二次大战以后有了长足进展，其主要成果也是大样本方面。冯·米塞斯、弗雷歇(Frechet)和费歇尔等对其中的极值理论作过贡献，而格涅坚科1943年总其大成。1948年，霍夫丁(Hoeffding)引进u-统计量。u-统计量是很重要的一类非参数统计量。后来，霍夫丁和其他学者如哈杰克(Hajek 1968)、陈希孺（1980年前后）对u-统计量作了很多研究。陈希孺在核的非整数阶矩有限的情况下，得到了u-统计量强收敛的最佳速度，改进并完成了Serfling等1973年的工作。他还在同样的条件下建立了u-统计量与冯·米塞斯统计量的一个联系公式，并以此为工具证明了“冯·米塞斯统计量”的分布以$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$的速度收敛于$N(0,1)$。他还将$u$-统计量的方法用于带多余位置一刻度参数的非参数两样本检验问题，提出了一个具有良好大样本性质的检验。在核的$2+\delta(0<\delta<1)$阶矩有限的条件下u-统计量分布收敛于$N(0,1)$的最佳速度$O(n^{-\delta/2})$的结果是赵林城得到的。林正炎将其推广到非同分布变量的情况。

非参数统计中的“威尔科克逊统计量”及相应的检验是威尔科克逊于1945年创立的。1944年沃德和沃尔弗维茨在一般条件下证明了线性置换统计量的渐近正态性，1949年诺特(G.E.Noether)

改进了上述结果，1961年哈杰克又作了更大的改进。1958年，契尔诺夫(Chernoff)和萨维杰(Savage) 建立了一般线性秩统计量的极限定理,成为以后一系列研究的出发点和基础。1968年哈杰克在一项开创性工作中把线性秩统计量的极限分布理论作了重大推进。目前，非参数统计这个分支的研究相当活跃，应用也越来越广。

许宝騄是第一位在数理统计和概率论领域中享有国际声誉的中国数学家。他的论文起初是处理当时热门的统计问题，即奈曼与皮尔逊还有费歇尔意义下的一元和多元线性模型，后来才加进了概率论、矩阵论与试验设计的内容。他的特点是对复杂的分析计算不厌其烦,这反映了他对具体问题而非一般抽象问题的偏爱。许宝騄在统计推断方面有一系列出色工作，这些工作显示了奈曼一皮尔逊观点的深刻影响。他1936～1940年留学英国时，是奈曼最杰出的学生。“就奈曼看来,许绝对地和沃德是在同一个水平上——他们是新成长一代中两位卓绝的数理统计学家。”(见1982年西德Springer-Verlag出版的Constance Reid撰写的奈曼传) 1938年，许的头两篇统计论文刊于奈曼一皮尔逊编的《统计研究报告》第二卷上：关于现在称为Behrens-Fisher问题的《用于两样本问题的学生氏t检验的理论》,被斯契夫(Scheffe, 1970) 称为“数学严密性的一个范本”；论文《方差的最佳二次无偏估计》处理了高斯一马尔可夫模型中方差σ^2的最优估计问题，得到了通常σ^2无偏估计S^2在(1)二次的，(2)无偏的这些估计量中具有一致最小方差的充要条件。这篇文章成为后来关于方差分量和方差的最佳二次估计的起点。许还讨论了小样推断中一元和多元线性假设的检验问题，特别是关于这些假设检验的势的性质，例如，得到了Hotelling的T^2检验的势，证明了T^2的非零分布是独立的非中心的X^2变量和中心X^2变量之比,并还证明了此检验在某种意义下是局部最强的（1938年《关于Hotelling广义T^2的一点

注记》)；提出了一般的多元线性假设的法式，获得了在协方差已知时似然比统计量的非零分布，以及当协方差未知时用θ_i表示相应的行列式方程的非零根，证明了当样本大小趋于无穷时，检验统计量$W=\Pi(1-\theta_i)$和$V=\Sigma\theta_i/(1-\theta_i)$的渐近势是一致的(1940年《关于广义方差分析》)；证明了怎样把一般多元线性回归问题化简成早先的法式（1941年《一般性回归问题的典约形式》)；获得了一元线性假设似然比检验的第一个优良性质，这个结果是在许宝騄最重要的论文之一《从势函数看方差分析》(1941)中给出的，它开创了两个发展方向：一方面，他的学生Simaika(1941)将许的形式用于多元问题(Hotelling的T^2和多元相关系数)，后来沃德(1942)、许宝騄（1945年《E^2检验和T^2检验的势函数》)、沃尔弗维茨(1949)、莱赫曼（1959）及其他人改进了这个形式。另一方面，许宝騄在这里得到所有相似检验的新方法。而且，在许的建议下，希迈卡(Simaika，1941)和莱赫曼（1947）将此方法应用于其它问题，1950年莱赫曼和斯契夫用完备性的概念作了概括。50～60年代，许宝騄主持的“班成”讨论班在变叙的极限分布及试验设计方面的成果，都可与国际上同类工作相比。

多元分析理论开端于1915年费歇尔发现正态总体样本相关系数的分布。此后二十多年间，费歇尔、Wishart、Hotelling和许宝騄等学者的重要工作，奠定了这个有重要实用价值的分支的基础。许宝騄对奠定和推进在当代多元分析中普遍采用的矩阵论工具这门学科起了重要作用。他从1938年到1945年所发表的成果处于多元分析理论发展的前沿。他给出了：某些行列式方程的根的分布(1939)、关于联合乘积矩的分布一个新的证法(1940)、直角坐标分布的代数推导方法(1940)、行列式方程的根的极限分布和典则相关系数的极限分布(1941)、关于秩的问题和Fisher检验函数的极限分布(1941)、一类统计量的极限分布（1942）及样本均值函数的极限分布及其在假设检验中的应用(1949)。应用克拉美

的渐进展开理论和Berry关于比值分布的定理，许给出了比值的极限分布(1945，1946)。许还发展了用于多元分析的某些矩阵变换的雅可比计算技巧。许宝騄居世界先进水平的学术成就，受到国内外学者的推崇。1979年，美国《数理统计年鉴》专门组织撰文高度评价他的工作。我们可以这样认为，如果说费歇尔、K.皮尔逊、戈赛特等并非数学出身的英国学派在第二次世界大战前对统计的工作突出的表现了“实用性”意义的话，那么以许宝騄、沃德、奈曼等为代表的工作则促进了统计学的“数学化”过程，完成了数理统计这门纯数学分支的最后定型，并对战后统计的发展，有极其重大的影响。许宝騄生前为中国科学院学部委员，被誉为中国数学界的一代宗师。

由于多元分析自三十年代奠基以来的理论和方法绝大多数都建立在多元正态总体的前提下，统计学家们长期以来一直致力于突破正态模式而发展非正态总体的多元分析(广义多元分析)。解决此问题有两种方法：一是非参数方法，Puri，L.P.和Sen，P.K.1971年曾系统地研究过，但非参数法的大部分统计量一般很难求得精确分布，一般只能在大样本时使用；另一种方法是寻找一种与正态分布有许多相似性质的分布类，使多元分析的大部分理论和方法可以平行地移至这个分布类上，椭球等高分布族就是具有这种优良性质的分布类，自Kelker1970年对它作较系统的研究后，近二十年来，这个方向引起国际统计界极大的重视，发展十分迅速。在1976年到1984年的短短八年间就发表了四篇综合性文章(Devlin1976，Gnanadesikan和Kettenring Muirhead1980，Chmielewski，方开泰1984)，较全面系统地介绍了这个充满活力的方向的发展全貌。中国数学家方开泰、张尧庭、陈汉峰、卞国瑞、汪嘉冈和美国科学院院士、斯坦福大学教授安德尔森（T.W.Anderson）以及京生(Jensen，D.R)、古德(Good，I.J.)卡雷亚(Kariya，T.)等中外数学家近年来的成果，在多元分析的领域

内是个飞跃，被认为是当前最值得探索的方向之一。以椭球等高分布族的性质及其样本理论（包括参数估计、假设检验、分布理论等)为主题的广义多元分析的巨大进展，也引起了不同的争议。其原因是它所讨论的样本理论不具备样本相互独立的性质，而且要求有某些正交变换的不变性，在实际中不一定能做到。因此，目前的许多结果与其说是统计的不如说是概率的。因而，平行于古典多元分析我们可以提出大量新的理论课题值得进一步研究，广义多元分析这块刚刚被开垦的肥沃土壤，将产生更丰硕的成果。

80年代以来，国内多元分析方面的新进展主要有方开泰、张尧庭等人的工作。张尧庭曾将通常相关系数的概念加以推广，提出了“广义相关系数”的概念，并给出了它的一些应用。他针对多元线性回归分析中选择自变量的问题，发明了所谓“双重筛法”，比通常的逐步回归法更为合理，他与卞国瑞研究了多元线性模型中期值参数向量的各个分量之间是否存在某种线性关系的检验问题，在协方差矩阵的种种假设之下导出了广义似然比统计量，它们都是非中心Wishart矩阵的特征根的简单对称函数。方开泰、张尧庭等近年对椭球分布族的多元分析作了深入研究。首先，方开泰和安德尔森推广了Cochran定理到椭球分布族，并给出了此族参数的极大似然估计，使得这方面多元分析研究得到了推动。方开泰和他的学生把非中心F，t，T^2统计量扩张到椭球族，并给出了此族下T^2、Wilks统计量的无偏性和一致最优不变性的证明。方开泰、安德尔森、张尧庭等还讨论了矩阵球对称分布，解决了协方差阵特征根和特征向量的分布。方开泰、方碧琦建立了一种新的多元指数分布族，并给出了它的密度函数、特征函数及边缘分布等。卞国瑞、张尧庭在多元Canonica模型带$O(n)$不变误差中解决了均值行向量成线性相关零假设的不变检验，并讨论了它的渐近性质。

最近，陈希孺、陈桂景、赵林成等对密度函数、非参数回归、

判别和预测等方面有关统计量的收敛性及收敛速度的研究取得了新的进展，有些结果已令人相当满意。江泽培、谢衷浩等对时间序列理论，成平、吴传义对小样本问题的指数族结构，吴启光等对小样本问题的参数估计相容性都作了深入的研究。同时，新的数据处理方法被引进，例如郑忠国继Rubin之后，在国内独立地提出了一种与“自助法”平行的、处理同样问题但又比“自助法”简便的方法——随机加权法。李国英、陈忠链首先建立了多元分布散布度的投影寻踪估计，等等。

纵观近年来国际数理统计的进展，主要特点为：

① 更注意对原始数据规律的探索。Tukey提出了有别于经典统计的探索数据处理方法和概念，它并不注重总体模型的假设，而是强调探讨数据的结构。在这个思想的指导下，出现了“刀切法”、“自助法”、“投影寻踪法”、“统计图法”和“统计诊断”等几种数据处理方法。这种数据分析研究，是当前国际上的一个热门。其最大特点是与计算机相结合。

② 改变了过去着重线性统计模型研究的状况，更注意非线性统计首先是非线性回归的研究。

③ 近年来出现了半参数模型(介乎参数模型与非参数模型之间)，J.Bickel在这方面取得了进展。

④ 多元分析更受到人们的重视；出现了各种各样解决处理高维数据的方法。

⑤ 生物统计中出现了生存分析新方向；统计与经济结合产生了计量经济。

⑥ 统计质量控制已从被动式的质量控制走向积极的控制。日本学者的成果（例如田口立一方法）受到重视。

⑦ Bayes学派与非Bayes学派长期争论不休，至今依然如此。学术争论推动了统计学向前发展。Linclly认为Bayes统计将主宰21世纪；Efron认为两者将平分秋色；有的学者完全反对。中国

统计学家成平认为：Bayes学派的中心是他们的哲学观点——"主观概率"，他们不仅看当前数据，而且主张用统计者本人或人们过去积累的经验，即主张用主观的经验，这在经济、社会统计、决策分析中都是受到充分重视的，因此有可能占优势。成平指出，无先验信息的Bayes统计不是它的主流，只是为了这个学派理论上的完整而做的研究。

综上所述，数理统计学在以往几十年有了长足进展，但理论上的突破却不多见。令人瞩目的是它的应用呈现出极其壮观的局面，尤其在质量管理、计量经济学、计量心理学、保险数学方面起着日益重要的作用。数理统计学已渗透于工业统计、农业统计、水文统计、统计医学、统计力学、统计物理学、统计化学、统计教育学、统计体育学、统计心理学等许多领域。六十年代国际上的"新数学运动"将大量现代数学注入中学数学课本，但在七十年代又纷纷退出，唯有统计学站住了脚跟。有人预言，统计学知识将进一步普及，甚至比解二次方程更为人所知，也许是不无道理的。

在目前，数理统计学除了运用数学分析、实变函数论、测度论、高等代数、矩阵论等工具外，还需运用泛函分析、拓扑学、抽象代数、组合分析等现代数学工具，并需要相当深刻的分析概率论、极限理论和随机过程的工具。这就导致出现了一小批只搞理论而不大涉及应用的"数理统计学家"，和另一大批只搞应用但却无法接触新理论、新方法的"应用统计专家"。这特别反映在英国学派和美国学派这两种模式上。这种理论与应用分家从发展的观点来看是必然的，在历史上有进步作用，但无疑又对当前统计的健康发展不利。不过，国际数理统计学界正在作理论和实际结合起来的努力，因而可以期待更高层次的统一必将出现于更高级的发展阶段。

第十三章

现代数学发展概观之九：运筹学

运筹学是近四十年来发展起来的一门学科。它产生于第二次世界大战时英国对空火器的研究，随即在美国得到传播。战后，英、美等国努力将运筹学用于产业方面，因而使它在生产管理、工程技术、军事作战、科学试验、财政经济以及社会科学中得到极为广泛的应用。

运筹学的确切定义是什么？这并不是一个很容易的问题。莫尔斯（P.M.Morse)和肯姆巴尔（G.E.Kimball）1951年、卡尔赫曼-阿可夫-阿罗夫（C.W.Churchman-R.L.Ackoff-E.L.Arnoff）1957年以及比尔（S.Beer）所作的定义都是具有代表性的。一般地，运筹学的内涵应包括上述三个定义中共通的四点即：第一，希望给出作为判断决策基础的旁观和建议，因而只限于向经营管理部门提供服务；第二，它之所以应限于旁观和建议，是因为有科学方法能够适用的范围这一限制，科学的方法以具有作为演绎系统的模型，而且模型的合理性能够与实际资料对比而进行验证为其基本要求；第三，业务（operation)要成为这样的科研对象，须满足三个条件：i）它是客观确定的，ii）业务的作用结果，效应和影响可以客观地计测，iii）有重复实施的可能；第四，目的在于求得面临的实际行动的指导策略。

运用运筹学处理问题时，有两个重要特点：一是从全局观点出发，二是通过建立模型（如数学模型、模拟模型），对要求解的问题得到最科学的决策。运筹学内容庞杂，主要分支有规划论、对策论、排队论、优选法、图论和组合学、不动点计算等。

I. 规 划 论

规划论包括线性规划、非线性规划、动态规划、随机规划、多目标规划等。

线性规划（LP）是用于在线性等式及不等式组的条件下求线性目标函数的极值问题的方法（含代数的和拓扑的两种）。线性规划的历史，至少可追溯到蒙日（1781）、傅里叶（1823）。关于R^n的凸多面锥、凸多面体、有限个线性不等式的代数理论的古典结果，有戈尔东（P.Gordon,1873）、法卡斯（J.Farkas,1902）、斯泰蒙克（E.Stiemke,1915）、韦尔(H.Weyl，1935）等的工作。其后有塔凯尔（A.W.Tucker,1956）的精确化结果。卡拉热沃多利(C.Caratheodory，1911)、哈尔（A.Haar，1924）得到R^n一般凸集理论的古典结果。在以线性规划的形式向函数空间的推广中，有以罗森布鲁蒙（P.C.Rosenbloom,1951～1952)为主的对数到空间（l）的推广。寇恩-塔凯尔(H.W.Kuhn-A.W.Tucker，1951）将最大解问题对应于鞍点的事实推广到非线性情形，而赫尔维兹（L.Hurwicz,1958）将寇恩-塔凯尔的理论推广到线性拓扑空间，在并不比寇恩-塔凯尔的条件强的一些限制下，能够平行地讨论非线性问题的最大解和用导数表示的弱鞍点条件之间的对应。石井惠一（1964）则在较为简单地表示的条件下，阐明了目标函数sup与拉格朗日形式的inf，sup的一致性，同时给出达到sup，inf所应满足的条件，并将此应用于发展切贝晓夫

不等式和克拉美-逻不等式的一般理论。

另一方面，在冯·诺伊曼（1928、1944）创立对策论和建立了平衡增长模型（1935、1936），勒昂泰夫(W.Leontief,1951)开创产业关联分析，特别是丹捷格(G.B.Dantzig.，1951）提出著名的单纯形法后，美国经济学家库普曼斯(T.C.Koopmans)将线性规划应用于更广泛的经济领域。丹捷格的单纯形法是求解一般线性规划问题的方法，他发现只要用线性不等式代替线性方程，就能把许多提高设备利用率的方法简化成简单的数学模型，在经过完整的数学论证之后，丹捷格提出了这种优美的方法。它使线性规划在理论上趋于成熟。在此之前，苏联的康特洛维奇(Л.В.Канторовин)1939年发表《生产组织与计划中的数学方法》,系统阐述了线性最优化中的最大值问题,用的是解因子方法，并应用于苏联经济和卫国战争。库普曼斯和康特洛维奇后来因此获诺贝尔经济学奖。此后线性规划的发展主要在美国。例如，沃尔夫和卡特勒尔提出了以主元消去法为基本运算的多种变形——二段单形法、对偶单形法、合成单形法、主对偶法等。除主元消去法外，还有许多方法提出来作为基本 算，如丹捷格和沃尔夫1960年提出利用分解原理的广义线性规划的处理方法，从而开辟了线性规划的无限维空间推广与实用计算相结合的一条途径。另外，戈摩瑞(R.E.Gomory）在1959年到1960年的论文中提出了几种求解整数规划（限定变量的全部或一部分取整数值的线性规划问题）的方法，已得到的能够满足实用的计算方法开辟了整数规划广泛的应用领域。

丹捷格的单纯形算法因可以很快求出线性规划的解而被普遍使用。但是，1972年克里和闵替举出反例，说明此法不是多项式时间算法。当然，这种例子所占的比例非常小，单纯形算法的平均计算量是次数很低的多项式。1979年，25岁的苏联数学家哈强(L.G.Khachian)找到了解有理线性规划的有效算法——椭球

算法，并证明了它是个多项式算法，在当时引起了很大轰动。美国《纽约时报》却把事情夸大了，他们以为哈强的算法完全解决了计算机科学中的一个举世瞩目的课题"$P=NP$"，并由此而解决了数学上的著名难题——货郎担问题，故以《苏联的一次发现震动了数学界》为标题作了失实的报道，引起了一场风波。不过，实践已证明椭球算法在许多问题上很有效，在理论上它比单纯形算法还好。当然，在解决实际问题时它远不如单纯形算法。因此，寻找一个实用的解线性规划的多项式时间的算法已成为应用数学和运筹学界的注意中心。1984年11月27日，在美国运筹学会与管理协会联会上，贝尔实验室的28岁印裔数学家卡玛卡作了题为《一个新的多项式时间的线性规划算法》的特别报告，宣布找到了解线性规划的实际可行的多项式算法，引起了极大反响。卡玛卡的算法是一个成功的尝试，和单纯形算法不同，它是一个迭代算法。它产生了一系列可行多胞形及其中的一个内点，并在每一步用一个凸投影变换使多胞形正规化并使这一步的迭代解成为其中心，这种迭代解最后收敛于线性规划的最优解。卡玛卡证明了他的算法的计算比椭球算法快$C\cdot n^{2.5}$倍（C与变量个数n无关）。更使人感兴趣的是，卡玛卡用这个算法作了计算：一个$n=5000$的线性规划问题，他的算法比单纯形算法快50倍；而且，当变量和约束个数增多时，卡玛卡算法更显出优越性。新算法还可进行并行演算。如果真是这样，卡玛卡新算法就能以现有的计算机解决由于变量和约束过多而使单纯形法无法解决的许多重要的实际问题。由于新算法提出还不久，解决的实际问题尚不太多，有些数学家对其实际效果还持保留态度。有人还用例子说明，算法的收敛速度并非象卡玛卡所说是二次收敛的。这说明，卡玛卡的工作尚需实践和完善。人们普遍认为，卡玛卡的工作是在应用数学上有价值的发现，并有十分广阔的发展前景。

1981年，S.斯梅尔（S.Smale）研究了单纯形法在平均意义

下的计算复性，证明了当约束个数固定时，平均迭代次数与变量个数的比值具有上界·伊得芒兹（J.Edmonds）与布兰德（G Bland）讨论了有向拟阵与线性规划的工作联系着单纯性法在某种转轴运算下的计算复杂性问题。L.Lovasz对次模函数最优化问题给出了一些较深刻的结果。

在非线性规划理论的发展中，寇恩-塔凯尔首开先河，于1951年证明了在某些正则条件下，凸规划问题可以归结为寻求拉格朗日函数$\varphi(x,u)$的鞍点的问题。沃尔夫（1961）、曼格萨瑞（O.L. Mangasaring，1965）和庞斯坦（J.Ponstein 1965）等给出了数学规划中的对偶定理。丹捷格、艾森伯格（E.Eisenberg）和科特勒（R.W.Cottle）1965年引进了对称的对偶性概念，并取得了原问题和对偶问题存在共同的最优解的主要结果。70年代以来，对偶性理论方面的研究，主要在各种类型的对偶性理论的统一方面开展工作，由此导致对映象的半连续性的进一步研究。1980年帕舍（Passy）和约托乌（Yutev）提出了伪对偶的概念，并研究了带等式约束的非线性规划的伪对偶定理。关于非线性规划求解方法，有求解凸(凹)二次规划问题的E.M.L.Beale法(它是单形法的直接推广，1959)，M.Frank-P.Wolfe算法(1956)和P.Wolfe算法（1959），后两种算法都是与寇恩-塔凯尔关系有联系的并用了单形法。有Arrow-Hurwicz—宇沢梯度法(1958)，用于拉格朗日函数$\varphi(x,u)$可以解凸（凹）规划问题。有Rosen梯度投影法（1960）。有可行方向法，它最初由卓藤狄杰克（G. Zoutendijk）1960年提出，他于1970年统一了各种形式的可行方向法并且提出了产生最优方向S^k的规范化准则，同时从计算方法的观点对此问题进行了详细研究。80年代初，提出有效的新算法和研究其收敛性及收敛速度，仍然是最优化理论中极活跃的部分。常用的可行方向法，在希尔伯特空间的紧致凸子集上的连续可微泛函的极值问题、不可微的规划问题和随机的规划问题中得

到发展。很有实用价值的广义既约梯度法（GRG）被修正，从而得到收敛性的证明。越明义、韩继业改进了Wolfe的既约梯度法，提出了一个新的既约梯度法，并证明了它的收敛性，从而使1962年以来关于改进Wolfe既约梯度法以使之收敛的问题获解决。共轭梯度法的一个新进展是它与BFGS方法的结合，这有助于提高共轭梯度法的计算效率。增广拉格朗日乘子法受到较多注意，已经证明了对于乘子的不同修正方法可以导致不同的收敛速度。M.J.D.Powell和Han等人对非线性约束的一般规划问题的变尺度方法作了很好的研究，证明了当拉格朗日函数的海色矩阵是不定矩阵时，变尺度方法仍有超线性的收敛速度。变尺度法是一个富有生命力的新算法，作为对数学规划具有开创性工作的奖励，Powell获得了国际数学规划学会1982年颁发的首届Dantzig奖。桂湘云等改进了Goldfarb变尺度法，证明了改进的方法具有超线性的敛速，从而解决了Goldfarb方法对一般目标函数的收敛问题。胡毓达提出了解非线性约束规划问题的SCDD方法。在总体极值的研究方面，郑权等对带有非线性约束的总极值问题提出了新算法，并有效地用于光学薄膜的自动设计、透镜初始解自动创成以及电网络最优设计。曼格萨瑞研究了二次规划、线性与非线性互补性问题具有局部唯一解时的必要条件。俞文魮自70年代来研究了关于直接搜索法的理论，80年代初他又给出一类直接搜索法的收敛定理，并在单纯形调优法的收敛性等方面取得一些有意义的结果。

动态规划是美国的贝尔曼（R·Bellman）1957年创立的。贝尔曼发现许多要求作出最佳决策的问题是由多个阶段的一连串部分决策构成的。对这种多段多层的决策问题，他研究出一种数学技巧，即动态规划。它继线性规划、非线性规划之后成为数学规划理论中的一个基本分支。动态规划理论开拓了50年代以前未曾见过的函数方程理论中的新领域，最优化原理贯穿其始终。它具

有优良的特征：(1) 与计算一切可能的策略的穷举法相比，能降低维数；(2) 若对变量的取值范围有所限制，能够求得用微积分方法难以求得的最大(小)值；(3) 即使所给函数不是以解析形式表示的，也可以递归地求得数值解；(4) 用古典的方法不能处理的一些问题变得易于表述，特别对于二点边值问题和稳变分问题的解决是有力的；(5) 数学规划的许多问题可表述为动态规划，对库存管理、生产计划或最优搜索，以及对控制理论中的最优控制、自适应控制等问题，动态规划提供了极其有效的方法。动态规划理论在60年代后取得长足进展，贝尔曼的工作起了核心作用(1961～62)。贝尔曼用精湛的数学技巧总结实际工作经验，使之上升到理论，结果不仅在工程技术领域得到突破性的进展，而且在数学上别开生面，形成了新学科方向，因而在数学史上增添了光辉的一页。1970年，贝尔曼荣获美国数学会和工业与应用数学协会颁发的第一届维纳应用数学奖。此外，霍瓦德(R.A.Howard)讨论了伴有报酬的马尔可夫型决策过程，得到了收益值迭代法。其后，布拉克维尔(D.H.Blackwell)等人严格地证明了马尔可夫过程的收敛性定理。鉴于动态规划方法在最优控制理论中具有比最大值原理更为普遍适用的特征，但却缺乏严格的逻辑基础，1966年波尔特雅斯基(V.G.Boltyanskii)对动态规划方法提出了论证。

多目标规划方面，维尔日比肯(Wierzbicki)在近年发展了一种新的基本理论，即建立在“参考性目标水准”和“标量化罚函数”这两个概念上的理论。几乎全部基本定理，包括Pareto最优性的必要条件和充分条件，都可通过这两个概念加以表达或推广。此外还发展了“和协解”的概念，证明了和协解在非下限点集中是稠密的。国内，应玫茜和魏权令研究了单变量多目标规划问题的解法以及多目标规划的稳定性。陈光亚研究了有效点的性质和多目标规划的某类逼近问题。

Ⅱ. 对 策 论

对策论又叫博奕论，是从策略的观点出发，研究竞赛性、斗争性活动怎样取胜的特定的数学方法。对策论是冯·诺伊曼在应用数学上的杰出贡献之一。他早在1926年就提出了打扑克之类的对策思想，并引进“策略”概念，构造了一个数学模型，并将此理论巧妙地用于经济领域。他抛弃了传统的用经典力学方法处理经济问题，以新颖的策略思想和组合工具取而代之。1929年，冯·诺伊曼研究出对策论的一些初期结果。1944年，他和摩根斯特恩（O.Morgenstern）合著的《对策论和经济行为》是奠基性著作。其后，对策论迅速发展。“二人零和对策”理论已大致完善。一般的“n人对策”自1944年以来提出过各种求解的途径，但尚未确立统一的理论。对策论给予数理经济学和其它社会科学以很大的影响，特别是在这些领域中拓扑学、代数学方法得到广泛的应用。“非合作对策”与“合作对策”等理论，是基本的研究方向，有很多问题尚未解决。今后的研究主流，似乎更可能是后者。

非合作对策的基本理论，可在纳西（J.Nash，1951）提出的平衡点的概念上统一。平衡点概念的萌芽始于不完全竞争理论的先驱者科尔诺特（A.Cournot）的著作（1838）。在n人合作对策论方面，除冯·诺伊曼—摩根斯特恩形式的条件之外，还提出了一些条件，但目前还没有令人十分满意的。在关于“冯·诺伊曼—摩根斯特恩解”的研究中，曾经猜想过可能对所有对策都存在这样的解，但卢卡斯（W.F.Lucas，1969）发现一个10人对策，不存在“冯·诺伊曼—摩根斯特恩解”。另外，还有把满足适当条件的分配的特定结果看成是合作对策之值的思想。在这一方

向上，有代表性的“夏浦利值”（1953）。夏浦利(L.S.Shapley)和吉涅斯（D.B.Gillies）还引进“核心”的概念。合作对策论围绕着各种解的性质的研究不断获得进展。1960年，沃曼—柏勒格（R.J.Aumann-B.Peleg）等提出了对不存在共同价值测度的情形进行考察与这些概念相对应的概念，并按同样方式发展了相应的理论。至于扩充型对策的理论，应归于冯·诺伊曼—摩根斯特恩（1944）和寇恩（1953）。

对策论在思想和方法上，对数理经济学产生了直接的影响，使之在二次大战之后，得以正式确立。从历史上看，数理经济学源于科尔诺特的研究工作，由瓦尔拉斯（L.Walras）的一般平衡理论形成体系。瓦尔拉斯提出的猜想即“竞争平衡的存在定理”，直到半个世纪后才根据角谷静夫的不动点定理给出了数学上的证明。探索理论是由瓦尔拉斯发展的，这一理论现在作 n 个变量的常微分方程组的解的全局性稳定问题而得到研究。斯卡夫（H.Scarf）、德布雷乌（G.Debreu）等人还证明了，用适当方法让主体的数量增至无限大时，此核心收敛于仅由竞争平衡解组成的集合。沃曼和范因德（K.Vind）等人利用测度论概念将一开始就包含无限个主体的经济公式化，证明其核心仅由竞争均衡解组成。

Ⅲ. 排 队 论

排队论又叫随机服务系统理论。在日常生活中，经常因买车票、打电话等而出现排队现象，有排队就必须等待。排队论研究的就是预测排队的拥挤程度、等待时间等等的平均数和分布情况，使服务系统安排得最合理。排队论的创始人是电话工程师厄尔朗（Erlang）。从1910年开始，对这种现象进行概率论的分析

和研究以话务理论的名称开展起来。随着运筹学的发展，人们逐渐注意到除电话通信以外的其它领域中所产生的类似问题，与此相应，或添加或放松各种约束条件，做了大量的研究，形成了所谓排队论的专门理论。目前，排队论的发展侧重于随机服务系统最优化问题的研究，也就是研究怎样使系统的设计和控制取得最高的效率和收益。

1953年，肯达尔（D.G.Kendall）在引入表示排队模型的"Kendall记号"——F/G/C记号的同时，首先开始对反映现实问题非常接近的"嵌入马尔可夫链"进行研究；扑拉泽克(F.Pollaczek，1957）取特征函数引进函数论讨论法；林德利(D.V.Lindley，1952)、凯佛—沃尔弗维茨（1955)、河口竜夫(1961)等从概率论角度归结出积分方程法。克尔森—库哈瑞(J.Keilson-A.Kooharian，1961）添加辅助变量于$\xi(t)$（在时刻t时正被服务和正在排队等待的顾客总数）过程构造出一个马尔可夫过程，从这一观点出发，只要没有特殊的约束条件，就可把一般的排队过程归结为马尔可夫过程，这样，就能以卡普曼—柯尔莫哥洛夫方程等为线索进行马尔可夫过程的分析。但由于其复杂性，在目前情况下作为一般的解法很难说是成功的。作为这一流派的成果，塔卡克斯（L.Takács）引进了虚等待时间（1962)；本纳斯（V.E.Beneš）对一般到达模型做了处理；肯达尔（1964）在综合报告中，对上述几种方法进行了统一。

沙阿蒂（T.L.Saaty，1961）等人在瞬时解与遍历条件获得了结果。凯佛—沃尔弗维茨（1955）还得到了在GI/G/S一般情形下，除概率为1，$Sg_n=S_n=$常数之外，$SE(g_n)>E(S_n)$是使平衡分布存在的充分必要条件，罗依纳斯（R.M.Loynes，1962）将讨论推广到$\{\tau_i\}$、$\{s_i\}$均为严格平衡的情形。

目前，随机服务理论仍然是一个很活跃的分支，近几年对许多复杂的排队系统进行了研究。由于实用的需要，研究计算机网络系

统的随机服务模型受到很多注意。它和随机服务系统的最优控制关系密切。在马尔可夫决策规划的研究方面，借助于统计判决方法和贝叶斯方法，对系统状态只能部分观察的决策模型和对系统的转移概率全然不知的决策模型进行了研究，并得到有意义的结果。

Ⅳ. 优 选 法

优选法就是寻求最好的方式来解决最优化问题。它的名目繁多，大的方面可分成单因素优选法和多因素优选法两类。单因素优选法包括对分法、0.618法、分数分法等；多因素优选法包括爬山法、调优法等。

优选法是美国数学家基费1953年提出的。我国著名数学家华罗庚针对经济活动中普遍存在的管理问题和技术问题，独立于西方提出了统筹法和优选法。他所获得的一批成效显著的研究成果，国外文献上是找不到的。50年代末，他就将统筹学中的数学方法推广应用于工业、交通部门，写出了经济模型中平衡、迭代法、非负矩阵特征根的理论及其应用（《高等数学引论》第一卷1963；第二卷1981）。他还提出了近似计算多重积分的新思想，后来发展为著名的“华（罗庚）—王（元）方法”。他在1964年根据我国的国情吸收统计、运筹学等学科的有效方法，进一步发展应用，形成在我国行之有效的统筹法。他撰写了《统筹方法概况报告》（1964)、《多因素优选法》（1974)、《谈谈为国民经济服务的一些数学方法，讨论班讲义》（1979）等高质量论文。华罗庚的优选法分为三部分：直接法；有数学模型的方法；与时间有关的动态优化方面的内容。在理论上他给出0.618法最优性的正确证明，并对文献中已有的各种方法的有效性作了比较，提出了一些更有效的方法。如抛物体法和切块法等，并给出收敛速度

的证明（《优选法》1981)。除"优选学"(1969) 中所建立的数学模型外，还包括预测技术、数据库管理系统、决策分析、经济数学、财务与经济分析、规划理论、存储理论、布局与选点、可行性研究、项目管理等。1984—1985年间，华罗庚写出《计划经济大范围最优化的数学理论》书稿共10篇，对量综与消耗系数方阵、消耗系数、生产能力的上限、布劳威尔不动点定理、生产系统的危机等问题作了深入的研究。他以统筹法、优选法为核心工具，为发展规划我国重大建设项目作出了杰出贡献。国外同行称赞华罗庚"开辟了一条发展应用数学的新途径，不但对中国有用，对其它各国也有用"。

V. 图论和组合学

这方面发展很快，研究课题极其繁多。60年代末,Heawood定理获得证明。1976年，美国数学家阿佩尔（K.Appel）和黑肯（W.Haken）利用高速计算机证明了已有124年之久的、曾经难住许多数学家的"四色问题".图论的另外两个著名问题：哈密顿问题和Ulam猜想，近年也有了进展。在组合最优化方面，哈强的解有理线性规划的椭球算法得到了若干改进，它们多集中在如何选取更小的初始椭球和在每次迭代时对椭球进行更多的切割。关于矩阵的全单模性的研究，也有引人注目的成果。国内，朱永津和刘振宏于1965年提出最小树形图算法，运用图的收缩与扩张的运算，给出了一个有向图中求最小树形图的一种多项式算法，在拟阵交计算上为首创，被称为"朱—刘算法".80年代初，朱永津和王建方研究了具有最大路长限制的顺序二分树和顺序扩充二分树，得到了较好的结果。刘彦佩研究了关于图的不可定向最大亏格问题，得到很好的结果。

第 十 四 章

现代数学发展概观之十：电子计算机

Ⅰ. 先驱者的探索

电子计算机是20世纪最伟大的技术发明，它使人类面临着一场新的科学技术革命，它比瓦特1768年发明蒸汽机所标志的工业革命更加激动人心。

人类制造计算工具和发展计算技术的历史，源远而流长。古希腊就产生了极原始的计算工具。我国春秋战国使用的小竹棍十进位制算筹，则更进了一步。15世纪，我国发明了珠算盘代替算筹，流传极广，它比古罗马制作的笨重而原始的金属算盘，又要先进得多。英国人耐普尔（Napier）1614年发明对数后，英国人甘特1620年发明了计算尺。1628年，英国的温盖德也设计了类似的计算尺。世界上最长的计算尺（长6.096米，重50公斤）是美国尼伯格和伊诺州洛安克本中学的数学会会员在1973～1974年间建制的。

17世纪，在欧洲计算工具与自动记时机械——钟表制造技术的结合，产生了最早的计算机。计算工具的改革的重要一步归功于法国数学家和哲学家巴斯噶（B. Pascal），他于1642年制成了

最早的、能进行六位数的加减法计算的手摇计算机——加法器。巴斯噶在《沉思录》中写道："这种算术器所进行的工作，比动物的行为，更接近人类的思维。"它远近闻名，吸引了很多人，其中就有莱布尼兹。莱布尼兹提出直接进行机械乘法的设计思想，他改进了巴斯噶的加法器，制成了可进行四则运算的手摇演算器。莱布尼兹的另一个重要贡献是提出了系统的二进制算术运算法则。但他认为世界上最早的二进位制是中国的八卦。据说，莱布尼兹曾把自己的计算机的复制品赠给了康熙皇帝。早期计算机的最优秀成果，是英国数学家巴比奇在1822年制成的差分机和1834年制成的分析机。差分机的计算精度达6位小数，可进行简单多项式计算，且能根据设计者的安排自动完成整个过程。分析机是历史上第一个有运算器、贮存器、输入输出器等基本部件的通用计算机，可完成所有的算术运算，在设计思想上很接近现代计算机。巴比奇开辟了计算机自动化的方向。但由于当时技术上实现巴比奇复杂的设想有困难，更重要的是那个时代对这类机器还没有迫切需要，巴比奇的工作未得到人们的理解和支持，因而他耗尽了毕生精力和资财还是未能成功。巴比奇的全部设计都被锁进了历史博物馆。20世纪的发明家不得不艰难地重新走一遍他所走的路。将近过了一百年，巴比奇的梦想和预言才成为现实。

巴比奇制造分析机失败后，大型数字计算机的研制停滞了约70年之久。但是，促使数字计算机诞生的各种因素却在孕育之中。例如，为了满足人口普查的需要，美国工程师霍勒里思(H. Hollerith)发明了统计机，它的原理为穿孔长式计算机奠定了基础。此外，基础数学的发展也为电子计算机的诞生准备了条件。1854年，英国数学家布尔在《思维规律研究》中，成功地将形式逻辑归结为一种代数演算，即建立了逻辑（布尔）代数，它成为制造数字计算机不可缺少的数学工具。

Ⅱ. 现代计算机的奠基性工作

到20世纪，由于电气技术和电子技术的发展，逻辑代数被应用于继电器电路、电网和电子电路的研究，使计算机开始了新的时代。1930年，美国麻省理工学院的布什等人研制成用电动机驱动的可以解二阶常微分方程的大型模拟机。1936年，英国数学家图灵（A. M. Turing）发表著名的关于"理想计算机"的论文，提出理想计算机（图灵机）理论，从而成为现代计算机基本设计思想的创始人。当时，电子计算机还没有建造，图灵的目的不是为了研制某种具体的计算机，而是为了解决怎样判断一类数学问题是否机械可解或哪一些函数是可计算的这样一个数学的基本问题。著名的图灵理论是：一个模型能算的问题，别的模型在理论上也是可算的。图灵论题是数学、数理逻辑和计算机科学的基础，它严格描述了计算机的逻辑构成。而且，通用图灵机是"程序内存"的。图灵机理论不仅解决了数学基础的理论问题，而且早在第一台自动计算机Z_3制成前5年就已经在数学上证明通用计算机是可以制造出来的。图灵还深刻地指出了计算机不论其结构如何，作为机器，它的能力都有极限。他还证明有一类问题是计算机不可能解决的，例如图灵机不能解决"停机"问题。美国的丘吉(Church)、克林内（Kleene）也几乎同时提出了通用计算机的理论设想。20世纪70年代末，我国的洪加威等对图灵论题作了新发展，提出相似性原理，从正面回答了图灵论题没有回答的问题。因为今日的计算机科学和数学，不仅要研究理论的可计算性，还要研究现实的可计算性，这种理论相当复杂。图灵并没有回答不同的计算模型在计算同一个问题类时所消耗的资源是否同样多。洪加威等作了回答：各理想的计算模型之间不仅等价，而且对于

同一个问题类，它们耗费本质上同样多的并行时间、工作空间和序列时间，而且三者同时成立。同时还发现并行时间和空间之间还具有某些对称的性质，即对偶原理。更进一步，还发现计算的相似性与对偶性不仅对确定型计算成立，而且对一切计算类型成立。例如，作为对于非确定型计算的一个应用，可以得到一个对一切数学定理都成立的定理：任何定理证明长度的对数、证明的宽度和证明的深度之间是多项式相关联的。

世界上首创电器元件研制计算机的探索工作是德国青年工程师朱斯（K. Zuse）作出的。他于1938年制成一台纯机械结构的计算机Z_1（运算速度慢、可靠性差），之后，又用电磁继电器来改进，并于1941年制成世界上第一台程序控制通用机电式Z-3计算机。该机采用了浮点计数、二进制运算，带数字存贮地址的指令形式。它指引8种指令，运算速度加法0.3秒，乘法4～5秒。因为机器1944年被炸毁，朱斯的工作很少为人所知。

在美国最早从事继电器计算机的是哈佛大学物理系研究生艾肯(H. Aiken)。在国际商业机器公司（IBM）的资助下，他1944年研制成功部分采用继电器的MARK-Ⅰ型“自动程序控制计算机”（主要用于科学计算）。1947年，又制成一台全继电器化的MARK-Ⅱ计算机。与此同时，美国贝尔实验室斯蒂比茨(G. R. Stibitz)领导的小组1940年研制成功一台用于电网络复数计算的继电器式计算机ModelⅠ号。1946年，又制成通用机Model5，此为现在多处理机系统的雏形。然而，艾肯等人未曾料到，他们的计算机因继电器而使运算速度受限，刚问世不久就很快被先进的电子计算机所淘汰了。虽然继电器计算机在计算机历史上只是短暂的一幕，但它为研制电子计算机积累了重要经验。

研究第一台电子计算机差不多是与艾肯研制机电（电动-机械式）计算机的工作同时进行的。早在30年代末期，一些科学家就看出使用电子管将可能大大提高计算速度（三极热电子真空管于

1906年发明，它的栅极控制电流开闭的速度比继电器快一万倍），因而纷纷试图制造电子计算机。尽管制造电子计算机的技术条件已经具备，但它需要巨额的资金和大量的人力，单靠科学家、工程师个人努力是不能实现的。美籍保加利亚物理学家阿塔纳索夫1937年就开始考虑到将电子技术引入计算机，他同他的同学贝里(C. Berry) 合作，试图试制一台能够求解包含30个未知数的线性方程的电子计算机，由于缺乏经济支持，结果只制成计算机的一个部件。德国的施赖尔 (Schreyer) 同朱斯合作，于1939年也计划制造一台有1500个电子管，每秒能运算10000次 的通用机，同样因得不到支持而夭折。

世界上第一个真正贯彻到底而获得成功的通用电子计算机方案，是美国宾夕法尼亚大学莫尔电工学院的莫希利(J. W. Mauchly)博士提出的。他在1941年了解到阿塔 纳 索夫研制电子计算机的情况，于是提出了自己研制电子计算机的设想和方案。当时，莫尔工学院电工系正同阿贝丁弹道研究实验室共同负责为陆军计算炮击表。而当时用大型微分分析仪计算，一张炮击表也往往要算二、三个月，而且结果还不能令人满意，还不用说 需 要200多名计算员了。为了解决这一困难，莫希利于1942年8月 提 出第一台电子计算机的初始方案，即《高速电子管计算装置的使用》报告。此方案于1943年4月被批准，当时估计约需要17000（实际使用18000个）电子管，70000个电阻，10000个 电 容，经费15万美元。这是一个冒巨大风险的计划。它被命名为“电子数值积分计算机”，简称ENIAC,于1943年6月开始试制。

在陆军的支持下，组成了莫尔研制小组开始工作，这是一个由志同道合的青年科学家和工程师所组成的朝气蓬勃的团体。24岁的硕士研究生埃克特 (J. P. Eckert) 任总工程师，莫希利本人也只有36岁。设计小组在技术上已具备一定条件，但尚未形成电子计算机最合理结构的全面分析与理论。就在这个关键时刻，

著名的美籍匈牙利数学家冯·诺伊曼于1944年夏参加了莫尔小组，通力合作制造电子计算机。当时冯·诺伊曼正在参加第一颗原子弹的研制工作，遇到原子裂变反应过程问题的大量计算的困难。电子计算机无疑对原子弹的研制有着重大的意义。冯·诺伊曼是弹道研究所和洛斯·阿拉莫斯科学研究所的顾问，他对计算机的许多关键性问题作出了重要贡献，成为研究的带头人。

1945年底，世界上第一台电子计算机——ENIAC机诞生，这台巨型机的竣工标志着人类计算工具历史性的变革。整个ENIAC方案的实施过程十分曲折，先后修改合同20次，造价超过48万美元。它共用18000多个电子管，1500只继电器，重30吨，耗电150千瓦，占地面积167M²。尽管它有一系列严重缺点（例如，体积大、耗电高、时常因电子管烧坏不得不停机检修，特别是它没有最大限度地实现采用电子技术所提供的巨大潜力，存储量太小，程序是外插型的，使用很不便等），但却显示了电子计算机在运算速度方面的巨大优越性，比当时已有的计算机快1000倍，而且能按照人所编好的程序采用电子线路自动地执行算术运算、逻辑运算和储存信息。ENIAC的成功在计算机历史上开辟了一个新纪元。

在ENIAC机竣工之前，即1944年8月至1945年6月，是计算机发展史上智力活动最紧张的时期。冯·诺伊曼和莫尔小组通力合作，制定了一个全新的存贮程序通用电子计算机方案“离散变量自动电子计算机”（简称EDVAC），对ENIAC机作了重大改进：（1）采用二进制，以充分发挥电子元件的高速度；（2）实现程序存贮。冯·诺伊曼把代码引入计算机的逻辑体制，编制了各种程序，提出把十进位制改为二进位制，用“0”和“1”的不同组合表示所有的数，把“程序外插”改成“程序内存”，全部运算成为真正的自动过程，即可以自动地从一个程序指令进到另一个程序指令。它不仅解决了速度匹配问题，还带来了在机器内部

用同样速度进行程序的逻辑选择的可能性。长达101页的EDVAC报告曾轰动国际数学界，这个方案是目前一切电子计算机设计的基础，人们把按这个方案制成的计算机通称为冯·诺伊曼机。遗憾的是，设计组内部因发明权问题产生分裂，莫希利和埃克特离开设计组另建了一个电子控制公司开始研制UNIVAC计算机，致使EDVAC到1952年才造出来。而冯·诺伊曼1946年又与布克斯戈德斯坦合作，提出了更完善的设计报告《电子计算机逻辑结构初探》，并实际建造了高速电子数字计算机JONIC。冯·诺伊曼的设计被誉为电子计算机发展史上的一个里程碑。1949年，世界上第一台存贮程序计算机EDSAC 首先由英国剑桥大学制成并投入运行。到50年代初，美国、苏联、日本分别制成电子计算机。1958年，我国制成第一台电子数字计算机DJS-Ⅰ（运行速度每秒200次），1959年制成DJS-Ⅱ型机（每秒运算10000次）。这类程序内存的电子管计算机称为第一代电子计算机。特别要提及的是，EDVAC 的设计方案为现代计算机的发展奠定了基础，从此，开始了现代计算机的历史。

Ⅲ．现代计算机的演变及发展方向

电子计算机从诞生以来的30多年，发展非常迅速，已经跨越了四个世代：

第一代（1946～1957）是电子管计算机，始于ENIAC及EDVAC的设计方案。1951年，莫希利和埃克特设计的世界上第一台通用自动计算机UNIVAC-Ⅰ由莱明顿·兰德公司研制成功。这是唯一用汞延迟线作为主存贮器的商用计算机，主存容量1000字，存取时间为500微秒。UNIVAC-Ⅰ的巨大成功赢得了广泛的声誉。1951年，冯·诺伊曼担任以生产继电器计算机而闻名的

IBM公司的顾问，使IBM在1953年研制成功IBM$_{701}$。这种机器使用静电管作主存，磁鼓作外存。1955年又研制成功IBM$_{650}$，它用磁鼓作为主存贮器，并装备了穿孔卡片输入输出系统，获得了很大成功。1950年，被称为“电脑大王”的美籍华裔物理学家王安提出利用磁性材料制造存贮器的思想。1953年，麻省理工学院的福瑞斯特（J. W. Forrester）和美国无线电公司同时发明了磁芯存贮器，它标志着计算机存贮技术进入了成熟阶段。

第二代（1958～1964）是晶体管计算机。晶体管是美国贝尔实验室的肖克利、巴丁和布拉顿1948年发明的，它拉开了电子技术革命的帷幕。1959年，菲尔科（Philco）公司研制成功第一台大型通用晶体管计算机，因它使用晶体管逻辑元件和快速磁芯存贮器，计算速度从每秒几千次提高到了几十万次，主存贮器容量从几千字提高到十万字。体积、功耗、重量、造价大为减少，开始采用高级算法语言和编码系统。在第二代计算机的研制中，由美国原子能委员会出资在IBM公司进行的IBM$_{7030}$计划和在莱明顿·兰德公司进行的Larc计划。IBM$_{7030}$首创交叉存贮、8位字节、管理设备、存贮保护、控制台程序中断、位寻址、设置独立的输入输出计算机等一系列新的设计思想，为研制第三代计算机360和370准备了条件。Larc是第一台多道程序处理的计算机（由埃克特设计），Larc计划对以后计算机发展产生了巨大影响。上述两项计划都是1955年提出，在60年代初研制成功的。

第三代（1965～1972）是小面积集成电路计算机。体积、功耗进一步减少，已有操作系统和终端、网络，高级语言发展到数百种，运算速度每秒千万次。计算机进入第三代以IBM公司1964年研制成功的360系列计算机为标志。IBM$_{360}$是迄今历史上获得最大成功的一个通用计算机系列。1970年，IBM$_{370}$系列机研制成功。在同IBM$_{360}$系列兼容的前提下，IBM$_{370}$系列机采用了虚拟存贮结构，使370的低档机的用户象大型机用户一样，享有极大的

存贮容量。而在研制特别大型的机器方面，CDC公司影响最大，CDC_{6600}是第三代最早的计算机之一(1964年)，1969年又完成超大型机7600的研制。第三代计算机的另一个重大发展方向是小型机的迅猛发展。这种大发展时期始于60年代中期集成电路出现之后，第三代小型机中最为著名的是PDP-8型小型机，它由世界上最大的生产小型机的美国数字计算机设备公司于1965年研制成功的。

第四代（1972年至今）是大规模集成电路计算机。体积、成本大幅度降低，稳定性提高，超级计算机运算速度每秒达6亿3千万次，操作系统、编译程序等系统软件更趋完善，微型机和计算机网络兴起，开创了计算机应用的新阶段.计算机进入第四代后，最突出的发展特点是：向微型化和巨型化两个方向发展。70年代微型机的诞生和发展，是计算机发展的最重大事件，也是计算机发展史上的第三次革命。这场革命始于费津（F. Faggin）1969年提出用于台式机的微处理概念和1970年，英特尔(Intel）公司发表的第一个微处理机族——Intel4004。如今，微型机已被用于日常生活中，单美国在1981年就拥有微型机75万台，预计到1990年将拥有3000万台。第四代计算机的另一个令人注目的成就是巨型机的发展。第一台获得巨大成功的亿次机是1976年投入运行的Cray-Ⅰ型机。它由美国的克雷（S. Cray）设计，克雷曾主持设计过CDC_{1604}、CDC_{6600}、CDC_{7600}。Cray-Ⅰ是一台向量机，做向量运算时同时可做加法、乘法等，向量运算的最高速度达每秒2.5亿次。70年代后期以来，宝来公司、CDC公司、兰德公司及其它美国公司，日本、英、法、苏等国也都投入相当力量研制巨型机。与微型、巨型机突飞猛进的同时，美国的阿姆达尔（G. M. Amdahl)开创了与IBM_{370}系列兼容的大型机主机的新局面，成为“插接兼容市场之父”。

计算机的发展速度确实十分惊人。1977年，美国制成一种超

大规模的计算机，运算速度每秒一亿次以上，用它可跟踪深海中的潜艇，在假目标中寻找真正的导弹，研究全球天气预报等。当美国“伊利阿克IV”型计算机（每秒1.5亿次)刚问世，伊利诺斯大学就在1979年设计制成了每秒3亿次的电子计算机而将之安装在美国西海岸的艾姆斯研究中心。仅隔3年，日本富士通电子计算机中心公司又于1982年研制出“FACOMVP”超级电子计算机，运算速度每秒达5亿次，比美国同期制造的运算速度最快的计算机还快20%以上。这种计算机专门应用于核聚变反应堆的设计、探测卫星照片的解析、气象预测等大规模运算。仅数月之后，日本日立公司于同年8月制成的超级电子计算机，其运算速度高达每秒6亿3千万次浮点运算。美国从80年代初就已开始研制每秒10亿次的巨型机。为了能超过美国的IBM，日本信息处理振兴协会1981年提出了研制第五代计算机的基本设想，1982年开始制订具体规划。日本组织了100多名各方面的专家，准备用10年时间研制出供90年代使用的，每秒100亿浮点运算速度的计算机。针对日本的行动，美国政府也采取相应措施，拨巨款大力发展超级的具有人工智能的计算机。美日计算机竞争，不可谓不激烈。

计算机向智能模拟的高级阶段发展是当前的重要发展趋势。在一些发达国家里，智能机器人已成为现实并在工业生产中得到广泛应用。目前，研究模拟人的思维，能够自适应、自学习的电子计算机已取得了进展。已试制成功能看、能走、看到障碍能自动避开、走过一次能记住行走路线的机器人，它的智能已有几岁儿童的水平。1984年，四川大学计算机系的杨家源在美国密执安州立大学进修期间，与该校人工语言实验室主任尤伦伯格博士合作，经过一年多努力，研制成功世界上第一台会讲汉语的微型计算机，它可以帮助有语言障碍的人重新获得“说话”能力，这是一项重大科技成果。那种能识别图象、能学习、能理解人的语言、能证明定理和求解问题的强智能机器人，正在进一步研制

中，它的发展前途未可估量。人工智能是第五代电子计算机即非冯·诺伊曼机的基础。人工智能、超大规模集成电路、非冯·诺伊曼结构以及软件工程中的许多基本问题（如研究非常高级语言的研究、并行程序方面的实施与探索等"软件危机"的中心问题）是研制第五代计算机需要解决的关键性技术问题。当前的"软件危机"，正预示着新的突破即将到来。

电子计算机是人类智力的产物，又是使人类智力进一步解放的武器。它在国民经济、工程设计、科学研究、地质勘探、油田开发、文字翻译、社会服务、军事、医学等部门都有广泛应用，其用途已达2600多种。它和许多基础科学相结合导致了计算力学、计算化学、计算物理、计算地学、计算生物学、计算天文学等许多新兴边缘学科的诞生。它还深入到数学本身的各个领域，改变了整个数学的面貌。近年来，依赖电子计算机检验相当大的数的素数性、证明有限单群的构造性、寻求微分方程的"孤立子解"等，都取得了成功。我国著名数学家吴文俊自70年代末以来，用一台HP9835A台式计算机证明了初等几何、微分几何中一些著名的定理，并发现了一些艰深的重要定理。1976年，美国数学家阿佩尔和黑肯操纵高速计算机，经过1200个小时的计算以及200亿个逻辑判定，解决了有124年历史的世界数学难题——四色问题。1977年，又有人宣布了一种较简单的证明，但亦要50小时。如果由一个具有足够迅速和准确判断力的人来完成这项工作，大约要花费30万年。1971年10月，美国纽约市哥伦比亚大学的杜卡利用计算机工作47.5小时，算出目前世界上$\sqrt{2}$最精确的近似值：小数点后1,000,082位数的最精确的平方根。1973年5月，法国两位女数学家吉劳德与波叶利用CDC_{7600}型电子计算机计算出小数点后面位数最多的π值是100万位：3.141592653589793…5779458151。她们把这个很长的小数印成一本200页厚的书，不消说这是世界上最枯燥无味的书。1984年，日本计算机学家已把

π值算到16,777,216位小数，并正进一步算到33,554,432位。他们试图借此研究π这个无穷小数出现的规律性，并以此说明人类对自然的认识是无穷无尽的。1983年，美国的戴维·斯洛文斯基使用一台每秒8千万次的巨型机Cray-Ⅰ，得到目前最大质数是$2^{86243}-1$。随着人工智能模拟的发展，出现了计算机与人脑关系问题的争论.那种认为智力机器人将控制人类的猜测，恐怕是不必要的担忧。因为再高级的智能机器人毕竟是由人设计制造出来的。

第十五章

现代数学发展概观之十一：控制论

I．第一代控制论

1948年，在应用数学史上发生了两件特别令人注目的大事：一件是美国贝尔实验室的数学博士申农（Shannon）在贝尔系统技术杂志上发表《通讯的数学理论》，宣告了信息论的诞生而立刻轰动世界。另一件是划时代的著作《控制论》由威利（Wiley）书店出版，该理论的创始人、美籍犹太学者、美国数学会副主席诺伯特·维纳（Norbert Wiener）教授更是成了举世闻名的人物。自此之后，国际控制论协会成立了，国际控制论会议接连召开，控制论杂志纷纷出版。在苏联，维纳的理论起先被指责为资产阶级的异端邪说和“伪科学”（见尤金编《简明哲学辞典》），但后来也成立了控制论研究所。而致力于这门创造性科学并为之作出杰出贡献的维纳，生前荣获了美国最高科学勋章。

维纳早期是一个优秀的纯粹数学家，对数理逻辑、概率论、调和分析作过十分重要的研究。他提出了以气体路径集合上的测度论为基础建立布朗运动的思想，对概率论是极富成效的——它不仅给老问题注入了新生命，更重要的是开辟了崭新的研究领域

(1921)。他建立了广义调和分析（1926、1929）和他的陶伯(Tauberian)定理(1928)。他与霍甫合作建立了在单复变函数的傅里叶变换中起重要作用的维纳一霍甫方程。他还引入了各态历经定理，他提出的赋范空间的公理体系与巴拿赫的提法完全一致。1933年，他与莫尔斯（M. Morse）分别荣获五年一次的美国数学会颁发的波歇（Bocher）奖。然而，维纳一生中的光辉顶点则是他创立了具有广阔发展前景的控制论。1940～1941年间，维纳首先研究的是火力控制问题。《控制论》这部伟大著作是维纳及许多专家（如：工程师比格劳、电工学家李郁荣、生理学家罗森勃吕特和麦卡洛克、数理逻辑学家皮茨、计算机设计家埃克特与布什、心理学家克留弗、数学家冯·诺伊曼、经济学家摩根斯顿）从1943～1947年经过一系列研究讨论，由维纳于1947年10月在墨西哥国立心脏研究所写成的。控制论是综合地处理动物与机器中的通信及控制机能的科学领域。创立这一新的科学领域的动因来自：(1)自动计算，(2)自动控制，(3)信息处理等方面的研究。当时这些领域中已经出现如高速电子计算机、自动瞄准器、电信设备和自控仪器等技术发明，从而为构成自动化技术基础的电子学、通信工程学和控制工程学的近代发展奠定了基础。维纳发展的控制论，中心问题是研究信息，因而人工脑以及人工智能一开始就是其重要的研究对象。它主要用时间序列的预报理论和滤波理论中的维纳方法处理信息的转换、提取、加工和预测，它依赖于系统的传递函数和频率特征，使用的数学工具主要是数理统计和调和分析，现在称这套方法为经典控制论（控制论第一代）。不过，在核心的数学理论的构成上，维纳用吉布斯(J. W. Gibbs）的统计力学处理的某些数学模型对控制论问题的原始表述至今仍然具有中心地位的重要性。

就其理论基础而言，控制论大体经历了经典控制理论、现代控制理论和大系统理论这三个阶段。通常以1948年作为形成经典

控制理论的起点。经典控制理论是以反馈为核心，把具有单一输入和单一输出的线性自动调节系统作为主要研究对象，研究的主要内容是自动调节系统的稳定性；所采用的数学模型则以传递函数描述，分析、综合调节系统的主要方法是频域法（即频率响应法），其中包含主要用于线性系统的对数频率法、根轨迹法，以及用于非线性系统的描述函数法等；所能达到的目的，基本是实现局部自动化。这一理论的形成、发展与广泛应用的时间，大体在1948～1957年。这是第一代控制理论。

Ⅱ．第二代控制论

第二代控制理论（亦称现代控制理论）形成于50年代末至60年代初。在第二代控制论发展早期，中国科学家钱学森结合他从事火箭控制方面的工作，系统总结了当时工程控制理论与技术的成果，指出了工程控制领域中的重要课题及发展方向，使控制论的基本原理成功地应用于工程技术，从而成为工程控制论的奠基人，丰富了控制论的科学体系。钱学森曾于1936年赴美获航空及数学博士学位，1947～1955年先后任美国加利福尼亚州理工学院、麻省理工学院空气动力学教授和美国加州理工学院喷气推进中心主任教授。1956年回国，为中国科学院学部委员。他在应用力学、系统工程、航天技术、工程控制论等多方面有重要成就与贡献，所著《工程控制论》获中国科学院科学奖一等奖。

第二代控制理论是在大量工程实践基础上逐渐形成的。它由美籍匈牙利学者卡尔曼（R. E. Kalman）奠定，由卡尔曼及苏联数学家邦德里雅金、美国数学家贝尔曼等发展。卡尔曼在控制论创始人维纳工作的基础上，引进数字计算方法中的“校正”概念，吸取了50年代“最优化”的研究成果，在1960年国际自动控

制联合会第一届大会上发表了《控制系统的一般理论》，相继发表了《线性估计和辨识问题的新结果》，从而奠定了现代控制理论的理论基础。他对控制系统的属性及其关联作用，提供了更深入的认识。第二代控制论的特点是用状态空间法或时域法研究控制系统，允许多输入、多输出；它按照概率性的最优准则来设计最优状态估计，即采用卡尔曼滤波；它的理想控制方案是使目标函数最优化来设计的，因而和动态规划有密切关联。第二代控制理论大体包括：多变量控制、系统辨识、最优估计和最优控制等主要内容及自适应控制等问题。虽然在50年代就提出了"最优化"概念，并试图实现最优控制，但由于理论上还不够成熟及限于当时的技术水平，并未实现这一目的。直到1960年前后，"状态空间"概念和方法得到发展并获得许多重要的结果（如发展了极大值原理、动态规划方法、矩量理论方法、函数空间方法等），并以不同形式给出了最优控制所必须满足的必要或充分条件，推出了最优控制的许多定性性质。这些理论、方法和在实际工程上的应用，已成为60年代自动控制研究领域的热门课题。

在最优控制问题的确定性数学表述方面，拉·沙尔（J. P. La Salle）1960年推广了贝尔曼等人(1956)和克拉科夫斯基(H. H. Красовский,1957）的结果，得到了最优控制的存在、唯一性定理。拉·沙尔提出以最快时间达到一条运动着的轨线上的点$Z(t)$的问题，并且证明了如果存在这样的控制u能使由它决定的一条运动轨线$x(t)$达到移动目标，则一定存在着饱和型的最优控制。菲利甫诺夫（A. Ф.Филипчов，1959）在放弃微分方程为线性的要求并且控制向量允许属于随时间而变动的有界闭集的情形下，给出了有固定端点的时间最优问题的一般结果.李一马卡斯(E. B. Lee—L. J. Markus，1961）进一步得到了关于紧致目标集在固定的时间区间上连续移动的问题的一个结果，此结果包括了拉沙尔的存在定理。邦德里雅金在发明了广泛应用于控制

理论及偏微分方程模型和随机性模型的推广的"最大值原理"后，1961年他又与波尔坚斯基（Г. Болтянский）等苏联学者一道给出了刻化最优控制的特征的方法，此方法以最大值原理为基础。贝尔曼于1957～1962年提出了动态规划方法。上面两种方法都给出了最优控制的必要条件。贝尔曼还利用对最优控制成立的泛函方程求解办法证明了动态规划方法对于较一般的控制过程包括适应控制过程的有效性。关于函数空间的一些控制问题方面，自邦德里雅金等人发表了关于最优控制的结果（1961）之后，叶果洛夫（Ю. В. Егоров，1964）将最大值原理推广到巴拿赫空间中的常微分方程。王耿介（P. K. C. Wang）1964年，布洛甘（W. L. Brogan）1965年分别应用动态规划方法对由偏微分方程描述的系统获得相应的最大值原理。巴拉克瑞西兰（A. V. Balakrishnan）1965年利用凸规划方法，研究了关于巴拿赫空间的发展方程的时间最优和终值问题。1971年，李昂斯(J.-L Lions）用泛函分析的方法解决了关于偏微分方程的控制理论的许多问题，特别是推导出一些变分不等式，它相应于邦德里雅金最大值原理。李昂斯还从这些不等式推出一系列的"单侧边界问题"。在可控性研究上，布特可夫斯基1965年将偏微分方程的可控性问题化为矩量问题来处理。与此类似，鲁塞尔(D. L. Russell，1967）通过利用非调和傅里叶级数解矩量问题，分析了一维波动方程的可控性问题。法托瑞利（H. O. Fattorini）1966～67年研究了方程$\frac{du}{dt}=Au+Bf$（在希尔伯特空间X中定义且具有初始条件$u(0)=0$，其中A是一个X中的强连续半群$\{e^{tA}, t\geqslant u\}$的无限小生成算子，B是由一个希尔伯特空间Y到X的有界算子，f为任一控制）的可控性与A、B性质的关系在假定A是半有界的自伴算子的情形，推广了拉沙尔对常微分方程描述的情形所得到的结果。他给出了为使上述方程为可控的（对有限维的

Y及某些B)须使A满足的充要条件。法托瑞利还研究了对高阶发展方程可控性（1967）和对边界控制问题的可控性而将其归结到分布控制的情形(1968)。“可控性”理论是卡尔曼等人建立的，1960年前后，控制论学者发现传递函数法对于多变量系统往往只能反映系统的输入-输出之间的外部关系，而具有相同传递函数矩阵的若干系统可以有完全不同的内在结构，这就要求要有不同的设计原则，从而提出了“结构不确定原理”.卡尔曼的“可控性”以及“可观测性”理论，就是在此基础上进行深入研究而创立的。所谓系统具有“可控性”，是指如果某些系统的状态变量或其组合，在一定条件下可以受控制变量的影响。所谓“可观测性”是指由于最优控制需取得状态的反馈信息，以便对系统状态进行最优控制，就必须能从观测值（一般指输出量）中获得关于系统状态的信息。

60年代中期，现代控制理论已初步形成，近20年来，最优控制的问题受到极大重视，这主要是由于对高质量控制的需要和在控制系统中更有效地使用计算机所导致的结果。以第二代控制理论进行系统设计，大大改善了系统的精度及技术经济指标，从而在许多部门中得到广泛应用。

Ⅲ．第三代控制论

70年代以来，控制论工作者提出频域（经典控制论中着重用频率法研究控制系统）、时域（状态空间法）统一处理的新方法，即将现代控制理论与经典控制理论融合，得到一些新的方法，并称之为控制论的第三代发展。系统控制问题，被列为首要的研究课题，这是自动化科学向广度发展的一种趋势。所谓第三代控制理论就是大系统理论，它是上述研究课题的理论基础。它着重

从控制与信息的观点，研究各种大系统的结构方案、总体设计中的“分解”方法和协调等问题。大系统通常具有三个特点：信息的采集和处理量大面广；系统的多级结构模型；以及集中与分散的控制方式。大系统理论近年极受重视。美国的电工及电子工程师学会（IEEE)在它的会志自动控制分册上刊出一个大系统和分散控制的专辑(1978年4月号)。该分册出专辑第一次是在1971年，内容是线性二次高斯型（LQG）系统；第二次是在1974年，内容是时间序列分析和辨识。这两次出专辑都是在那些理论已相当成熟的时候，而第三次的大系统理论还处于“幼年”期。这一新的理论领域是控制理论与运筹学的结合，控制论与信息论的结合。这个编辑的主事者美国麻省理工学院的艾森斯（M. Athans)等四人的综述文章，它概括了大系统理论研究进展主要表现在四个方面：

（i）模型的简化：以聚集法和摄动法设计出较简单的控制系统结构。

(ii) 内部联结系统的稳定性：第一步分解为子系统；第二步分析每个子系统的稳定性及其裕度；第三步研究内部联结对稳定性的影响。常用方法有李亚普诺夫法和输入输出关系分析法。

(iii) 分散反馈控制：这类控制系统是把一个大系统分解为若干个子系统，各自依据该一子系统的状态向量来确定它的控制向量。

(iv) 确定性系统多阶最优控制：在递阶系统中，各阶有上下级之分。下面的最优化与上面的决策有关，而上面的决策也取决于下面的情况。算法中包括迭代步骤。

关于大系统控制理论，辛格在1977年出版了《动态递阶系统》一书，受到各方面注目。在LQG系统中，把最优滤波（卡尔曼滤波器）和最优控制结合起来，实现随机干扰下的最优控制，这是控制系统的一个重大进展，它在理论上早已成熟，工业实践近

年来也有不少成效。控制系统的另一发展是把系统辨识和控制结合起来，可以实现自适应的功能。早年有麻省理工学院提出的模型参考型自适应系统。近十年来又有一些新发展，例如瑞典的安斯德朗（K. Astrom）1973年提出一种自整定调节器的算法，1978年又发表了一个用于TiO_2煅烧窑的实例。法国的夏莱（J. Richalet）等在1978年提出模型预测启发式控制系统。美国的约瑟夫（B. Joseph）和勃罗悉罗（C. B. Brosilo）等人在美国化学工程师学会杂志上发表的推断控制。另外，多变量系统仍是受人注意的领域。70年代末，极点配置、多变量根轨迹法、多变量频率法、双线性理论、模糊性理论、分布参数系统等都取得了一系列研究结果。另外，国外也有一种看法，认为有必要探索大系统理论研究的新途径，例如利用抽象代数的工具并且与计算机科学相结合。还有人认为有必要对大系统的结构稳定性作重新陈述。

在自动化技术科学向广度发展，实现复杂系统和大系统的控制的同时，实现智能控制成为向纵深发展的标志之一。智能控制，是研究与模拟人类智能活动及其控制与信息传递过程的规律，研制具有某些仿人智能的工程控制与信息处理系统的一个新兴分支学科。1978年6月，在第七届国际自控联（IFAC)会议上，弗姆斯（T. Vamos)作了题为"自动控制与人工智能"的报告，从方法和应用两方面阐述了自动控制与人工智能之间相互促进的关系，被认为是一个值得注意的新动向。人工智能的研究，在60年代中期之前还是建立在很不稳固的科学基础上。目前，机器智能和模式识别的研究在发达国家中正从实验室走向工业生产。对作出决定过程的自动化，使人对电子计算机用自然语言交互的系统做深入研究，机器翻译与定理证明，程序设计与检验程序正确性的自动化，建立数据智力库及自学的和信息-咨询系统，识别现实时间范围内的形象，制造完整化的机器人等等，都是当前人工智能问题研究的领域。而在模式识别方面，70年代末，一种可识别

24种口令，并能按口令操作的“口音号令系统”已正式生产了。用模式识别和图象处理的方法，已可进行文件的处理、产品质量检查、人体器官及癌细胞等方面的图象分析和识别等。

控制论的另一个重要分支——生物控制论（研究生物中的控制规律、信息传递和处理过程的科学）也取得长足进展。当前，包括我国在内的一些国家，正从事自组织系统及与其有关的神经元模型、感觉器官模型、脑膜型等内容的研究以及医学控制研究，并取得了重大成果，有的是划时代的进步。

Ⅳ. 走向世界的中国控制论研究

我国的控制论始于1958年钱学森发表《工程控制论》一书。工程控制论是由控制论的基本概念和方法同波德的反馈放大器理论、伺服机器理论相互渗透而产生的。钱学森是创始人之一，他的《工程控制论》是这个分支领域的奠基性文献。在钱学森的推动下，我国数学工作者开始研究工程控制论中的数学问题。秦元勋等探讨了时滞对控制系统稳定性的影响。宋健1958～1960年在苏联作研究生时，首先完成了三维最优控制器的理论分析、设计和技术实现；还首先证明并实现了激直流电机的双参数最优控制，建立了双参数最优控制理论，完成了实物实验。这些成果发表在苏联的《自动学与运动学》杂志上，多次被苏联和美国科学家作为范例而写进1966～1977年间的有关专著。1962年中国科学院数学所成立控制理论研究室，在关肇直带领下开展了控制系统的一般理论和最优控制理论的研究。1960～1964年，宋健首先发现等时场同最优控制之间的关系，建立了以等时场为理论基础的最优系统设计理论。该项成果的论文在1963年第二届国际自动化(IFAC)会议上宣读，美、英、法各国代表团曾给予高度评价。

70年代初，钱学森委托宋健对《工程控制论》进行了改写，钱称赞宋是“新版的创造者”。与此同时，宋健等提出并建立了解决火箭弹性振动的弹体结构弹性弯曲的新的数学模型；建立了由偏微分方程描述的受控对象和由常微分方程描述控制器这类耦合系统的理论模型；建立了点控制和点测量的严格理论基础，同时还提出了火箭在推力和阻力作用下发生失稳的原因、计算方法以及分布参数系统的反馈控制问题。陈翰馥关于随机控制系统的能控性和能观性的论文在1978年第七届 IFAC 会议上宣读。关肇直、张学铭、张嗣瀛等分别研究了弹性振动的镇定问题。李训经等把线性系统的时间最优控制方面的结果推广到无限维分布参数系统。张学铭于1970～1976年间，应用控制论非古典变分方法于现代物理理论中，建立了一种新的场论——非古典变分场论(变号场论），引进了宇宙势、势界等新的概念，指出了拉格朗日场论的严重缺点，提出了新的场运动方程，在现代物理理论中是一个重要突破。张应用这个理论解决了三个问题：（1）解爱因斯坦方程。自1915年爱因斯坦在广义相对论中提出短程线运动方程后，60多年间未曾有人提出过短程线解。而由张学铭首开先河。（2）电子在电磁场中的加速问题得到了新结果。（3）对德布罗意、波姆、海森堡所提出的非线性薛定锷方程的非线性项的确定，量子势的估值均做出了优良结果，同时对孤立子解的最佳稳定性也给出了一些必要条件。

80年代初，我国控制论研究不仅涉及线性与非线性系统、分布参数控制、系统辨识和参数估计、最优控制等，还开创了对非线性系统的整量化、抗量化与分歧、失稳、最可靠控制系统综合、最经济控制系统综合等新方向。作为第三代控制理论的重要内容、控制论的新分支、系统工程学发展到新阶段的大系统理论，也引起多方注意。同时，控制理论和工程实际、国计民生相结合，已取得一批可喜成果。国际上70年代开始了控制论在人口

理论中的应用。1979年，王浣尘用控制论方法研究了人口发展过程的动态特性。1978～1980年，在宋健倡导和主持下，应用控制论的思想，对我国人口发展的定量研究做了开创性工作。1980年，宋健、于景元、李广元公布了人口稳定性理论，应用控制理论思想首次建立了数学模型，从理论上找到了使人口系统稳定的妇女临界平均生育率；提出并证明了新的平均寿命和妇女两代间隔等各种人口指数的计算公式；成功地把最优控制理论应用到人口发展上，得到最优妇女平均生育率，完成了我国人口目标和人口优化设计的研究工作；首次定量地对我国人口发展做了中、长期（百年以后）预报，为我国制定长远人口规划提供了选择方案。这些研究工作引起中外人口学界的高度重视，被认为是定量人口学中的创举。它不仅为我国制定人口政策和国民经济计划提供了科学依据，而且还开创了应用现代控制论解决社会经济问题的道路，是目前社会控制论这一分支中最成功的范例。另外，在机器智能、识别的一般问题及文字声音识别、图象识别及其它应用、图象处理等四个方面，也取得了研究成果。在1981年日本东京举行的第8届IFAC世界大会上，反映宋健、王浣尘等23人的最新研究成果的16篇论文被宣读，显示出我国自动化控制理论研究正阔步走向世界。

第十六章

现代数学中的新学说

60年代以来，现代数学产生了许多新的理论和分支。其中，在国际上最令人瞩目的是非标准分析、突变理论、模糊数学和制约逻辑。

3

I．非标准分析

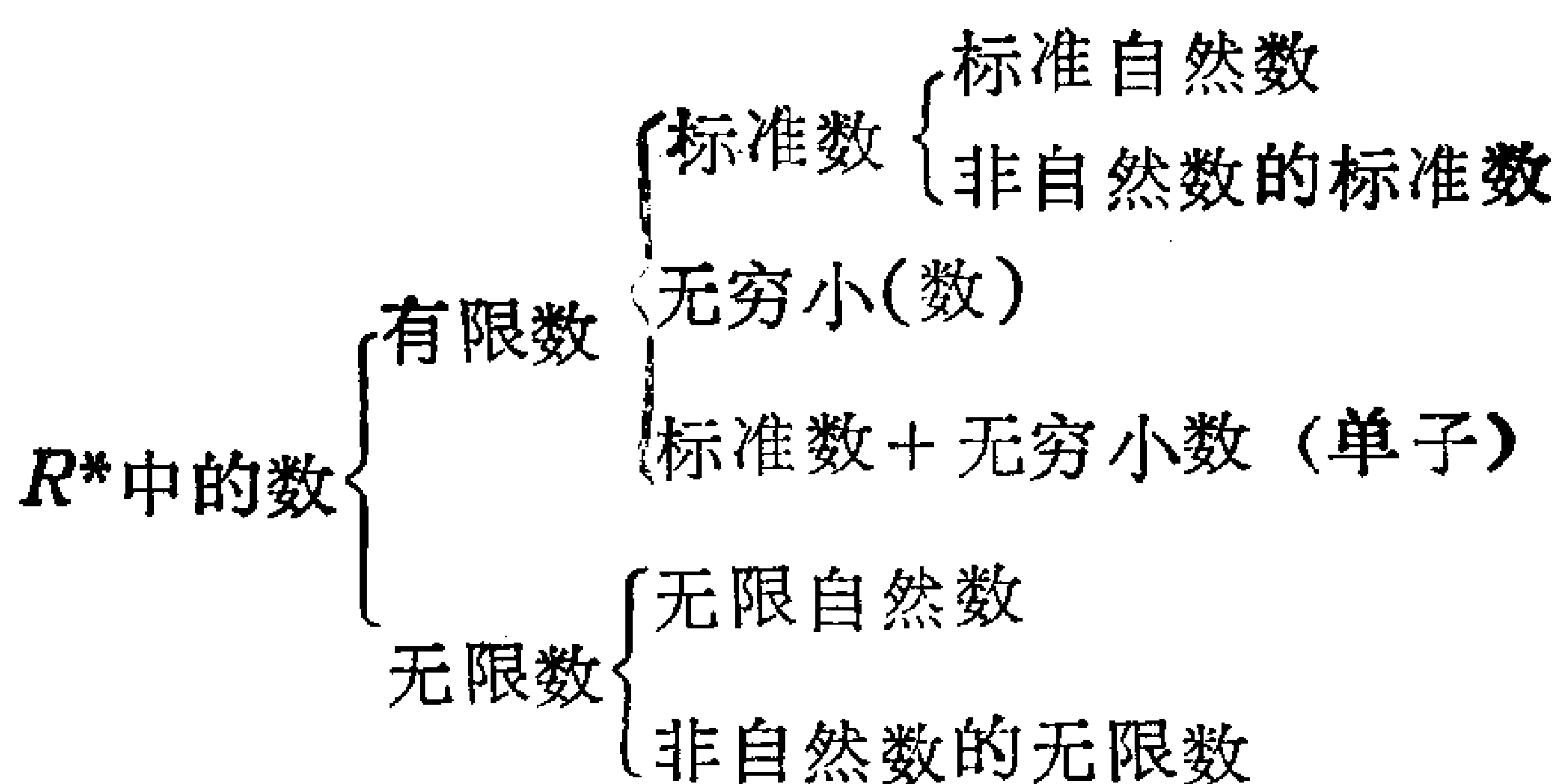
非标准分析是美国数理逻辑学家罗宾逊（A.Robinson，1918～1974）建立的一种数学理论。早在1956年，罗宾逊就在其著作《代数元数学》中提出了这一思想。1960年，他在美国普林斯顿大学的一个讨论班作报告时提出，现代数理逻辑的概念和方法能够为运用无穷小和无穷大的数来叙述微积分提供一个合适的框架。1961年，他又在符号逻辑学会年会的发言，以及在荷兰阿姆斯特丹皇家科学院院报上发表的文章《非标准分析》中，阐述了这一理论的基础概念和方法。一门包含有所谓算术的非标准模型（这种模型的存在是斯柯勒姆（T.Skolem）首先提出的)的学科——非标准分析就这样诞生了。

通常的经典数学分析，又称为标准分析。在前面我们已叙述

过由于“无穷小”所导致的第二次数学危机，使数学家们作了长期的艰苦努力，终于在19世纪末由柯西、维尔斯特拉斯等人用极限方法取代了无穷小量方法，从而建立了严谨的数学分析基础。

罗宾逊却让“无穷小”重返数坛使它获得新生。他用数理逻辑的科学方法，还运用无穷小量方法来刻化微积分问题，它不仅表明状态，而且也表达过程，描述运动。罗宾逊是这样来思考问题的：无穷小既然不是一个“数”，那么可否把实数系R扩大成新的数系R^*（称“非标准域”），使微积分在R^*中实施时，能象当年牛顿—欧拉时代那样具有直观和简便易行的优点？罗宾逊用数理逻辑中模型论的方法达到了目的。在非标准分析中，变量不仅可以取实数R，而且还可推广到无穷小量和无穷大量，统称超实数集合R^*。在R^*上展开的数学分析理论称非标准分析，同样可以在R^*上展开其它非标准数学理论，如复变函数、拓扑、泛函等等。R^*与R（标准实数域）的最重要的差别是：代数学已证明R是唯一的完备的有序域，R^*是有序域，故R^*必是不完备的，这是R^*的一个重要缺欠。R是一个阿基米德域，它具有阿基米德性质：任意两个数a、b，存在自然数n使$na>b$。而R^*不具备阿基米德性质，即R^*中存在无穷小数与它的单子结构，这具有最重要的本质的意义。设a、$b \in R^*$且$(a-b)$是无穷小（数），则称a给b无限接近（或等价），记为$a \simeq b$。无限接近是一个等价关系，以此关系把R^*分成等价类，可以证明每一个等价类中包含唯一的标准实数a，此等价类记为$\mu(a)$称为一个单子。单子$\mu(a)$不是R^*中的数，而相当于R中的数，相当于R中的数的在R^*中的分裂——相当于一种点的可分性。单子$\mu(a)$无边界，因为没有最大的、也没有最小的无穷小数。这就象模糊集一样，打破了经典集合界限分明的观念。

R^*中的数的种类为：



标准实数域R的几何形象是通常的数轴，非标准实数域R^*的几何形象是怎样描绘的呢？从“宏观”上看，R^*的数轴与R的数轴一样。但从“微观”上看并不相同，R^*数轴上的每一点内，有许多非标准实数。这些非标准实数彼此相差无限小量，形成了一个有内部结构的点——单子，每个单子只有一个标准实数。从标准实数来看，点与点是连续的，从超实数轴来看，点与点是连续与间断的对立统一。非标准分析为我们打开了“点”的新世界。在任何一个点中，都可建立坐标系，因为它是一个“世界”；而在任何一个“世界”都可以仅仅是坐标系的一“点”。非标准分析揭示了“点”的可分性的辩证法。至于R^*上函数、微分、积分、连续等概念更显出非标准分析的明确和深刻性。1970年，美国蒙特利尔大学的高桥从自然数集出发，用比较浅明、直观的方法构造了一个具体的分析的非标准模型，称R^*的高桥模型。

非标准分析建立后，发展得很活跃。许多数学家进行了研讨，鲁歇姆玻格(W.A.J.Luxemburg)编写了非标准分析的讲义，从而又活跃了罗宾逊的思路。1965年4月，罗宾逊出版《非标准分析》一书，概括了这一时期的许多研究成果。1969年鲁歇姆玻格编辑《非标准分析文集》；国际上接连举行了非标准分析讨论会。1973年3月，罗宾逊在普林斯顿高级研究所作报告之后，本世纪最著名的数理逻辑专家哥德尔评价说：“非标准分析不仅常常可以把初等定理的证明简化，而且也能够将一些深刻结果的

证明大大加以简化。例如，对于紧致算子存在不变子空间的证明就是这样。”他说，“我们有充分的理由相信，以这种或那种形式表示的非标准分析，将成为未来的分析学。”哥德尔还指出，“在未来的世纪里，人们将会把这看作是数学发展史上的一大怪事，就是在发明了微积分三百年之后，第一个精确的无限小理论才发展起来。我倾向于相信，这件怪事同另一个存在于同一长时间的怪事有点联系，这另一件怪事就是有些问题例如费尔玛问题，它只用初等算术的10个符号（$x^n+y^n=z^n$，$n>2$ 无整数解）就能写出来，但是，在问题提出了三百年之后，仍然未能加以解决。上面提到的疏忽也许要对以下的事实负有很大的责任：比起抽象数学的巨大发展来说，具体的数值问题的解决是远远地落后了。”

哥德尔的意见使非标准分析更受人刮目相看。随后，研究的人数逐年增多，研究的范围逐年扩大。非标准数学理论综合了分析（无穷小）、代数（运算）、逻辑（转换）、拓扑（极小邻域单子）、集合论（等价类）等各学科特有的方法，发挥了非标准数学理论的独特的作用——突出的明确性、简洁性、严谨性。1976年，开斯勒尔（J.Keisler)写出第一本非标准分析的微积分教科书《初等微积分学》，经过试教，据说情况良好，还将扩大试验。非标准模型的方法，象对数学分析一样，可以对其它所有的经典的（标准）数学、物理的理论进行类似的运用，从而发挥它无穷小运算的特有代数运算的简洁、严谨的特点。特别是有关无限、微观的数学物理部分，如广义函数、量子物理、基本粒子、场论等，非标准分析方法显示了巨大的作用和威力。目前，非标准的群论、非标准的拓扑、非标准的泛函分析、非标准复变函数、非标准变分学等相继问世。在函数空间（特别是不变子空间问题广义函数乘法问题）、概率论、量子力学、流体力学、理论物理等领域，非标准分析都开始得到应用。近年来，有人著《应用非标准分

析》，将非标准方法在数学物理方面的应用推向深入。中国科学院数学所年青的数学家李邦河，用非标准分析和广义函数的解析表示，给出了多年处理困难的广义函数乘法的一个方法。

纽约时报曾评价"非标准分析是对经济学、物理学、生物学以及时间概念等等都具有深远意义的一种数学形式，在数学界已引起了异乎寻常的骚动。"特别是它直接涉及到"无限"这一尖锐的数学方法论和哲学上的问题，尤其引起国内外的注意和议论。支持者有之，怀疑者亦有之，且有增多的趋势。因为非标准分析的数理逻辑方法极其繁琐，要弄懂它比搞清标准微积分困难得多。而且它与原来的标准分析是等价的，即认为凡是非标准分析能得到的结果，用标准分析方法都能得到，没有比原来的理论解决更多的问题。所以，他们认为未免是多此一举。因此，非标准分析固然为数学开辟了新的研究领域，至于能否成为"未来世纪的数学分析"，我们的回答是：实践是检验真理的唯一标准，让它去经受历史的考验吧。

Ⅱ. 突变理论

从1968年开始，第四届（1958）菲尔兹奖获得者、法国卓有成就的拓扑学家、配边理论的肇始者雷内·托姆（Rene Thom）陆续发表文章，到1972年出版《构造的稳定性和形态发生学》一书，明确地论述了"突变理论"，宣告了突变理论的诞生。一时风靡世界，掀起了突变理论热，成为八十年代重要的数学思潮之一。

早在30年代，苏联著名数学家、天才的盲人院士邦德里雅金就提出了经典的系统稳定性理论。所谓稳定系统，是指渐变过程、连续变化过程。系统的稳定性，是指当影响系统的因素连续

变化时，其系统的行为也连续变化。因素发生微小变化，系统的行为也只发生微小的变化，称之谓"微扰理论"。只有在"微扰"情况下，系统的定性结构不变，这才可以进行"控制"和"预测"。

而突变理论与经典的稳定系统性质相异。它主要以微分拓扑的方法分析高维空间曲面的奇点，通过对稳定性结构的研究，说明了有的事物不变、有的渐变、有的突变，从而提出一系列数学模型，用以描述各种飞跃和不连续的变化过程。作为这个理论出发点的基本概念，是半个世纪前著名数学大师庞加莱等研究的歧点理论（尖点）。从某种意义上说，基本突变理论是把R^n上具有任意阶连续偏导数的函数族$C^\infty(R^n)$中函数的奇点理论（歧点）的定理推广为关于这些函数的参数化族的定理。奇点稳定性指奇点在微扰时奇点不会改变类型或消失。在$C^\infty(R^n)$中可用泰勒级数展开式有限个系数相等来引入一种拓扑定义，再借助于$C_\infty(R^n)$在"0"点处的芽空间（即$C_\infty(R^n)$中的等价类，$C_\infty(R^n)$中两个函数f_1、f_2是等价的指f_1与f_2在零点的某邻域内相等，这样的等价类全体称为$C_\infty(R^n)$在"0"点处的芽空间）中无限维流形给出初等突变理论。通过等价类表现稳定微扰。其论证要通过复杂的拓扑方法和尖点突变几何。托姆考察了由不超过4个自变量的函数决定的曲面，用局部微分同胚的方法讨论奇点周围的性质，提出7种突变类型：折迭型、尖顶型、蝴蝶型、燕尾型、双曲脐型、椭圆脐型以及抛物脐型突变等。其中折迭型最简单，尖顶型用途最广。例如，水的几种质态之间的相互转化的模型，可用尖顶型突变来描述；弱酸、弱碱和两性区的分布可用蝴蝶突变来描述；活人变成死人（不可逆过程）可用折迭突变、燕尾突变等势函数最高为奇次的模型来描述。突变理论多应用于物理、力学，它给某些问题提供了新的线索。这是因为在这些领域中的突变模型比较容易获得定量的结果。在突变理论中，地质学、生态学、

流体几何学、弹性结构、热力学和相变理论、激光物理、光和色散理论、激波形成、船舶稳定、胚胎学、医学以及市场崩溃、战争爆发、监狱囚犯突然暴动等等自然界和社会现象中所发生的不连续变化和突然跳跃，都可用形象而精确的数学模型来把握其质量互变过程。当然，在社会科学方面的一些应用，还极不成熟。在生物学上的应用，虽尚有争议，但已取得很大进展。在生态学中的应用获得较大成功，例如从种群的经济模型中发展了一种具有边界区域上"约束"的突变理论，取得了很多定量的结果。在非线性控制理论中，最近引入突变理论而避免控制系统"突然"失灵。突变理论的拓扑方法还被应用于非线性系统的反应扩散方程求解问题，不可逆系统的分支点理论，耗散结构的热力学理论等方面。不过，关于非线性问题上的应用，目前离开实际实现还有很大距离。突变理论对物理学中一些类型的凸守恒律即一个物理量在空间某区域G内随时间的改变量等于G的边界的流量（如格林公式、奥高公式等），等问题，以及处理偏微分方程弱解空间上的泛函，确定在冲击点附近局部解的结构等，都具有现实的应用意义。从应用上看，被称作"解释参数的连续变化怎样引起不连续现象的第一个数学理论"的突变理论，与线性回归的统计法相比，具有类似的科学性和现实性。

托姆的突变理论为英国沃里克大学著名数学家齐曼推动，他组织了一个研究团体，扩展应用，在短短几年间连续发表400多篇论文。苏联拓扑学家、名噪一时的阿诺尔德（Arnold）对突变理论的数学基础做了许多出色的研究工作。

突变理论提出至今仅10多年，它引起了国际学术界的激烈争论。赞同者誉之为"数学智力革命——微积分以来最重要的发现，"说它可以与牛顿的《自然哲学的数学原理》相媲美。而反对者也尖锐地讥之为"皇帝的新衣"，认为突变理论是"完全无根据的推测围绕起来的一些细心的观察"，"突变理论是想仅仅用

思想推演出整个世界的企图”，企图提供“除数学之外无须其它知识的应用数学”。上述毁誉，都未免是偏颇之论而言过其实。数学家们较一致的意见是，肯定其关于微分拓扑的数学成果极有意义，但对其应用则持保留、怀疑态度。应当说，突变理论是伴随着人类认识自然界的不断深入以及科学研究的需要应运而生的。从认识论、方法论而言，它符合规律的严肃的科学研讨。对于研究光滑连续变化现象的数学模型的经典微积分来说，突变理论是竞相出现的研究不连续现象的数学理论中卓有成效的一种。它在理论和应用上都已取得一定成绩。而它的局限性——理论和方法上的缺陷和困难也是巨大的，如概念含混、模型的随意性、方法的不确定性、预测的不可检验性等问题，都是存在的。诞生不等于成功，任何新理论都是在发展中逐步完善的。因此，突变理论能否走向深入和严格化，开辟出显示其方法的独特性和有效性的广阔的应用天地来？现在就欲作出定论，尚为时过早。

Ⅲ. 模糊数学

物质运动创造了人脑。得天独厚的人脑又创造了物质和精神两大文明。在物质与文化两类人造产物中最有特色的东西大概要算数学及其物化——电子计算机。而由电子计算机对人脑的内向模拟所提出的机器智能问题，又刺激着数学的变革。精确性，是经典数学的一大特点。经典数学是人脑逻辑运行过程中凝固化的一块模板，计算机依靠它“复制”人的形式逻辑思维。现代数学建立在集合论的基础之上，集合可以表现概念，集合的运算和变换可以表现判断与逻辑推理。经典数学实际上已经不仅是人脑的一种外向映照，同时也能对人脑思维作内向的模写。在把客观世界清晰化、把人脑思维绝对化的前提下，在理论和应用的广阔天地里，

它建造起了令人惊叹的宏伟精美的大厦，谱写了足以留恋的威武雄壮的乐章，赢得了“科学皇后”的美名。但是，现代科学特别是计算机科学的迅猛发展，经典数学从本质上说来已经不适应了。最根本的原因是：精确性经典数学扬弃模糊性。而大自然中最普遍、最广泛的现象，人脑思维最生动、最灵活的特征恰恰在于具有模糊性。精确性与模糊性的对立，是当今科学发展所面临的一个十分突出的矛盾。各门学科迫切要求数学化、定量化，但科学的深化意味着研究对象的复杂化，复杂的东西又难于精确化。当人们不可能对复杂的因素全部进行考察，而只能在一个压缩了的低维空间上来观察问题的时候，即使本来是明确的概念也可以变得模糊。如果说，在过去能够回避模糊性而运用传统的经典数学，那么，在今天的科学发展中，人们再也无法回避模糊性了。必须要求数学对正有的许多“正统”概念进行本质的改造，使之重新描述大自然特别是人脑智慧中非清晰、非绝对化的一面。于是，历史的辩证法显示出一颗奇特的种子——在计算机科学的摇篮里，模糊数学应运而生了。

创立模糊数学的是美国加州大学伯克莱分校计算机系教授、著名的电子工程学家和控制论专家查德（L.A.Zadeh）。1965年，查德发表了《模糊集合》一文，大胆地对现代数学的基石——集合论进行修改和扩充，提出用模糊集合（Fuzzy set）作为表现模糊事物的数学模型。他引入“隶属度”这个概念来描述处于中介过渡的事物对差异一方所具有的倾向性程度，从亦此亦彼中提取非此非彼的信息，这是精确性对模糊性的一种逼近，因而首次成功地运用数学方法刻划模糊性现象，即由事物的中介过渡性所引起的概念外延的不分明性及识别判断的不确定性。这无疑是一项意义重大的开创性工作。从此模糊数学作为一门新的数学分支而逐步发展起来。它给数学、科学、哲学提出一系列广泛、深刻的问题，人们称之为数学史上继经典数学、统计数学之后的又一

个新的数学理论时期。

其实，自古以来，人们就对语言中的许多词的模糊性和相对性有所认识。后来康德也说过“知性在模糊不清的情况下起的作用最大。模糊观念要比清晰观念更富有表现力……”1904年，法国物理学家杜恩（P.Duhem)在其《物理理论的目的和结构》一书中说：同一般常识的模糊陈述相比，理论物理学上的陈述，正因其比较精确，反而比较不确定。罗素1923年在其著名论文《论模糊性》中指出：“整个语言或多或少是模糊的”。他特别强调：“当运用于精确符号时，排中律是有效的，但是当符号是模糊的时候，排中律就无效了。”1937年布拉克（M.Black）在《论模糊（逻辑分析的一个练习)》中对模糊性的逻辑方面曾作过探讨。1951年门格尔（K.Menger)在“法国科学院报告”上发表的一篇论文中也曾提出“模糊集”这一术语。但是，由于当时科学水平的限制，这些思想并未为世人注意。直到本世纪六十年代，查德适应了现代科学的要求，引人注目地将模糊理论形式化、数学化，即给出了模糊概念的定量表示法，才使它开始蓬勃发展。

模糊数学亦称不分明数学或弗晰数学。它并不是让数学变成模模糊糊的东西，而是要让数学进入具有模糊现象的领域中去。模糊集合的概念是数学理论和应用发展的自然成果。我们知道，精确性的经典数学是建立在康托尔集合论的基础上的。康托尔关于集合的概念基于形式逻辑的三大定律：同一律、矛盾律和排中律。即是说，一个对象对于一个集合，要么属于它，要么不属于它，二者必居且只居其一，绝不允许模棱两可。因而一个集合到底包含哪些事物（这叫集合的“外延”)必须明确，这是经典集合论开宗明义所提出的最起码的要求。正是这条要求，限制了经典集合论的应用范围，使它只能表现有清晰外延的概念，而无法表现客观世界中大量的不明确的模糊现象。例如，“高”与“矮”，

“冷”与“热”、“美”与“丑”、“脊椎动物”与“无脊椎动物”、“公有化经济”与“非公有化经济”……等等，这些对立的概念的外延是什么？其绝对分明的数量界限在哪里？细究起来，都是模糊的。没有明确外延的概念，叫模糊概念。模糊概念不能用普通集合论来刻划。还有人的思维例如“顿悟”，是潜意识流动的有意识结果，这种潜意识流并非被串行在一条链子上，而是网状的、多层次的、平行的、共轭的、偶联的。这种微妙的过程模糊性很大，更需要非清晰数学来作为刻划它的工具。模糊集合就是反映这种不分明、不清晰的数学概念。在逻辑学中，把对排中律的破坏，即正命题和反命题同时成立，称为二律背反（康德提出二律背反，黑格尔在此基础上建立了辩证法）。模糊逻辑把二律背反性质纳入其框架，这是区别于传统的二值逻辑（一个命题或真或假，二者必居且只居其一）的一大特点。正是由于这个特点，使它更接近于人类思维所使用的逻辑。

我们于前已知，悖论曾导致数学第三次危机，这正是与绝对思维方式的二值逻辑相对应的经典集合论所存在的缺陷。这种缺陷至今仍未解决而且反映到计算机语言中的实型、整型概念上。由此导致数学界产生了两个学派之争。查德没有介入争论。他在长期的信息和控制的研究中，回旋于“人脑思维”、“计算机”和“大系统”的矛盾之中。经典数学对于大量模糊现象的局限性刺激他重新考察了集合论，探讨数学与人脑思维究竟从何处分离？他发现了集合论实质上是扬弃了模糊性而抽象出来的，是把思维过程绝对化，从而达到精确、严密的目的。他决定重新将模糊性和数学统一在一起。他并不是放弃数学的严格性去迁就模糊性，而是让数学回过头来重新正视模糊性的现实世界，吸取人脑对于模糊现象识别和判决中的优点，从而为数学的运用开辟了新的方向。

模糊集合不象经典集合那样有明确的边界。查德指出，为了

刻划一个模糊集合，不需要指明元素是否属于它，只须指明论域U中的每一个元素究竟以多大的程度隶属于它。查德定义了所谓给定的论域U上的一个模糊子集A，是指：对任意 $x\in U$，都指定了一个数$\mu_A(x)\in[0,1]$，叫做x对A的隶属程度。映射 μ_A：$U\to[0,1]$，$x|\to\mu_A(x)$，叫做A的隶属函数。当 μ_A 的值域仅由0，1二值组成之时，μ_A便可对应成一个普通集合$A=\{x|\mu_A(x)=1\}$。显然，隶属函数μ_A是经典集合特征函数的自然推广，它是描述模糊性的关键，即模糊子集完全由其隶属函数所刻划。隶属函数与分解定理、扩展原理是模糊数学理论研究中的两大支柱。分解定理是指：设A为论域U的一个模糊子集合，A_λ是A的λ截集，$\lambda\in[0,1]$，则如下分解式成立：$A=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$，其中 λA_λ 表示X的一个模糊子集，称之为λ与A_λ的"乘积"，其隶属函数规定为：

$$\mu_{\lambda A_\lambda}(x)=\begin{cases}\lambda & (x\in A_\lambda)\\ 0 & (x\notin A_\lambda)\end{cases}$$

扩展原理是：设给定映射 f：$X\to Y$，则可扩张为：

$$\tilde{f}:\ A\to f(A)$$

此处$\tilde{f}$称为"f的扩张"。该原理可以解释为A经过映射 f 后，映成$f(A)$时，其隶属函数可以无保留的传递过去，亦即经过映射后，模糊子集A和$f(A)$论域中的相应元素的隶属度保持不变。若不是单值映射时，则规定象的隶属度取最大值。

通过分解定理可把模糊子集论的问题化为普通集合论的问题来处理，而扩展原理则是把普通集合论的方法扩展到模糊子集论中去。因此，我们可以这样认为，从概念上说来，模糊数学是经典数学的推广和发展，但从方法上说来模糊数学又是使用传统的普通集合论的方法。可见，模糊数学和经典数学之间有着难解难分的密切关系，查德定义的模糊集合是普通经典集合的拓广。

查德在这里把隶属度当作量化对象建立了模糊数学的初步体系，就象概率论把概率作为量化对象建立自己的数学体系一样。隶属度直接联系着模糊命题的直值。隶属度的运算和变换，直接联系着模糊逻辑。模糊逻辑是模糊数学的重要组成部分，它大体上分为多值逻辑和语言值逻辑。多值逻辑、连续值逻辑在模糊数学产生之前就已有之，但模糊逻辑有了质的推进：①它由模糊数学提供了深刻的源泉和发展的动力。②它以模糊数学作为模型来发展逻辑，突破了近似推理的模式困难。人脑中的近似推理模式是 $(P',P\to Q)\Longrightarrow Q'$。例如，老实人$(P)$讲真话$(Q)$，李四是个忠厚人$(P')$，可以推断李四不大容易说假话$(Q')$。如果用计算机来模拟人的近似推理，最大的困难就是，当$P'\neq P$时，$Q=$? 模糊逻辑却给出了具体公式：$Q'=P'.(P\to Q)$这个近似推理模型大大推进了模糊数学与模糊逻辑的应用。③它具有可以使用语言真值的非常重要的优点，因而在实际应用中有良好的性质。模糊集合论对应于模糊逻辑，表现为一些新的代数结构，例如德·摩根（De-Morgan)代数，亦称软代数。它是破坏了排中律的布尔代数，意味着亦此亦彼性。

1978年，查德继1975年提出“扩展原理”这种模糊函数的理论设计方案以及高阶模糊集的概念之后，又发表论文《以模糊集合作为可能性理论的基础》，引进了“可能性分布”的概念。从理论上说，由此概念而产生的“可能性理论”将可能与概率论平行，从实际背景上来说，它与自然语言所传递的信息关系密切，因而很快引起人们的注意。可能性分布与模糊子集、模糊约束是三个不同的但关系密切的概念。模糊集是对于集合概念的拓广，模糊约束是对于变量取值的范围限制。可能性分布则反映对于变量X的不同取值，命题“X是F”是否可能。它们从不同的角度反映同一个模糊现象。

查德特别对可能性与概率性的差异这一不易理解的问题作了

说明，并把可能性分布译成计算机程序的问题作了研究，使得在这个范围内模拟人的智能，提高人类的识别能力。

模糊数学与概率论既有紧密联系，又有本质的区别。概率论研究和处理随机性，模糊数学研究和处理模糊性。虽然随机性与模糊性都是非确定的东西，但随机性是由于因果律的破缺而造成的预言上的不确定性，模糊性则是由于排中律的破缺而造成的识别上的不确定性。随机试验可以客观地进行，模糊试验则与人的主观心理因素联系在一起。概率论是要抓住概率概念从因果率的破缺中寻找广义的因果律，模糊数学则要抓住隶属度概念从排中律的破缺中寻找广义的排中律。我们可以这样来认识模糊、可能、概率三性之间的关系：可能性来源于或受约束于语言中的模糊性，给可能性理论提供自然的基础和数学表达式的是模糊集合论；可能性理论的作用相似于测度论与概率论的关系，从这一点看，可视模糊约束为可能性分布，其程度函数起可能性分布函数的作用，而模糊变量与可能性分布的关系，与随机变量和概率分布的关系相似。那么，不能互相取代的模糊数学与概率论这两门学科之间的紧密联系是什么呢？简而言之，"下层（U）的模糊性往往可以转化为上层（$\mathscr{F}(U)$）的随机性"。它们相互渗透，已有了模糊概率论、模糊集与随机集落影理论等，从两门学科的交汇处展开着理论和应用的研究。

按国际上公认的权威查德和齐默曼教授（现任国际模糊系统协会IFSA主席，西德人）1981年的意见，模糊数学将沿着两条途径发展：一方面是研究模糊性的内在规律，也就是探讨模糊语言和模糊逻辑。在这个方向上，模糊数学与人工智能、知识工程、专家系统等分支的有机结合，以增进电脑活性，更好地模拟人的思维、对客观事物进行识别、聚类、论证、决策、评价、控制、优化等等，这些都是研究的中心课题。另一方面是把模糊集当作一个能概括更加多样化数学概念的框架，建立处理模糊现象

的确切性的数学理论，以拓广数学基础，产生象模糊拓扑、模糊拓扑空间、模糊测度和积分、模糊代数、模糊群论、模糊图论、模糊规划、模糊概率……等新的方向，使经典数学的若干方面在更广阔更深刻的意义下向前推进。同时，探讨模糊数学与传统数学在理论方面的关系，从而深化人类对数学中若干基本概念的认识。

由于模糊数学打破了形而上学的束缚，既探索事物"非此即彼"的明晰性态，又考察事物"亦此亦彼"的过渡性态，因而它的适应性也就比传统数学广泛得多。但是，在查德刚提出模糊集的几年中，研究速度相当慢。1965年仅查德一篇论文，1966年才2篇。大多数数学家特别是理论数学家是持怀疑甚至否定态度的。而苏联著名数学家M·盖尔芳德院士却敏锐地看出查德工作的意义，并建议查德应用模糊集论研究人的自然语言。显示了深刻的洞察力和卓越的预见性。到1970年，"模糊"观念逐渐为人所知，这方面的研究飞速增长，论文篇数年增长率几乎呈指数状。自1965到1986年这二十一年中，已发表论文超过5000篇。自1973至1979年的六年间，国际会议讨论模糊数学竟达25次。1983年7月，在马赛召开了"模糊信息、知识模型和判决分析"国际会议；1984年7月，在夏威夷召开"第一届模糊信息处理"国际会议；1984年成立了国际性组织"国际模糊系统协会（IFSA）"，创办了"Fuzzy Sets and Systems"国际杂志；1985年7月，在西班牙召开了"国际模糊系统协会第一届会议"。现在，中国、美、英、法、日、西德、苏联、波兰、西班牙、比利时、意大利、荷兰、罗马尼亚等几十个国家正在大力开展这一领域的研究工作。在初期，基础理论研究较多，近年已重点转向研究现实问题的应用，锋芒集中指向信息革命与机器智能，自动控制，系统理论，信息检索，意志决策，经济管理，语言识别，知识描述，人工智能，图象识别，计算机科学，生物学，心理学，最优化，社会学，算

法，医学，气象，探矿，飞机发动机故障，电厂选址，电负荷短期预报，人口控制、预测与人口发展政策研究，地震预报，……应用的触角伸向了科学、技术、管理的许多领域。

我国开始注意到模糊数学的研究是在1976年。世界著名模糊学家考夫曼（A·Kaufman，法国）、山泽（E·Sanchez，法国）、菅野（日本）和美籍华人P·P·Z等先后来华讲学，推动了我国模糊数学的发展。在著名数学家关肇直、著名科学家钱学森的倡导下，一批中青年数学家如刘应明、汪培庄等为开辟我国模糊数学研究领域，筚路蓝缕，披荆斩棘，建树卓著，受到国内外专家、学者的高度评价。在拓广数学的基础理论方面，我国在模糊拓扑、代数、测度、积分、泛函、方程等领域作了大量研究，取得了一批成果。针对模糊数学及其应用所研究的问题目前基本上属于静态的问题，王光远、欧进萍对动态模糊集合与模糊过程展开了研究，从客观实际出发定义了动态模糊集，将查德的扩展原理推广到了函数空间的模糊子集上；在此基础上从查德的模糊变量出发定义了模糊过程；讨论了模糊约束是某个函数空间上的模糊子集的模糊过程，引进了Fuzzy样本函数的概念，并在“几乎一切”的意义下定义和讨论了这种模糊过程的连续、微分和积分问题；提出了非齐次项是这类模糊过程的微分方程的一种解法，为研究工程实际中的动态模糊问题提供了初步的基础。

在应用方面，医学、地质、农业、地震、环境、控制、气象、遥感、金属切削、心理、教育、决策、经济管理、人口研究、结构设计等领域都进展较快。钱令希提出用模糊数学研究工程设计中的主观信息。王光远、王文泉1984年首次提出“结构模糊优化设计”，引起工程界注意。刘锡荟、姚志平等把模糊数学较系统地应用于地震工程和地震预报领域。屈锡华首次将模糊数学应用于婚姻年龄关系的研究方面，建立的初婚年龄Fuzzy数学模型从根本上揭示出婚姻年龄关系的普遍规律，解决了数理人口学

中为人关切的一个问题。但是，与国外相比，我国模糊数学应用面尚小，特别是未集中到与信息革命、知识工程相关的前沿阵地来。

模糊数学只有20年历史，作为一门新兴的学科，理论和方法自然还未完整齐备、多数还是借助于经典数学相应分支中原有的理论和方法，深度不够，成果还处于探索阶段。人们只是接触到模糊数学原理的一点皮毛，模糊数学的理论体系尚未真正建立。创始人查德却对它充满了信心："在即将到来的年代，……必将使模糊集论的重要性、影响力和应用都得到迅速发展，而最后，必将在人类知识的科学方法论的宝库中占有一席之地。"钱学森认为，应当建立一座比清晰数学更加宏伟的非清晰数学的大厦。是否有反对意见呢？当然有。著名的华裔美籍逻辑学家王浩教授就持相反态度。他说："我对模糊逻辑的看法是完全否定的，没有看到模糊逻辑有什么有趣的结果，……不看到有趣的结果，我不大相信。"一些概率论学者则认为模糊数学不过是概率论的一个应用而已，而一些搞纯粹数学的又不承认它是数学，有的应用数学家认为它道理很好，但又没有真正的实际效果。还有一种意见认为，查德所创始的当今意义下的模糊数学使用的是经典数学的方法，因而只能是经典数学的一个分支，主张还应有"另一种模糊数学"，这种模糊数学不能奠基于ZFC公理集合论，它不仅独立于精确性的经典数学，而且要在更高的形式中包括着经典数学。为此，肖奚安、朱梧贾自1985年以来，连续发表论文提出了为建造另一种模糊数学提供理论基础的中介逻辑演算ML和中介公理集合论MS，并认为MM（ML和MS）系统在自然科学、社会科学、数学、系统科学、思维科学、人体科学中，都有应用的前景。

不管人们意见如何，模糊数学毕竟已为国内外数学界普遍重视，而且它发展之迅速，涉及范围之广泛，在科学技术和经济发展中显示出的作用之大，不但在数学史上实属罕见，就是在科技

发展史上也是不多的。

Ⅳ. 制约逻辑

二千三百年前，古希腊的伟大思想家亚里士多德(Aristoteles，前384～前322年）以《工具论》创立了传统形式逻辑，为逻辑发展史树起了第一座丰碑。从19世纪中叶到20世纪初，经过英国数学家布尔、德国数学家弗雷格、英国哲学家、数学家罗素等人接连不断的努力，吸收莱布尼兹的成果，建立了后来作为电子计算机理论基础的“正统数理逻辑”的现代公理系统，这是逻辑学发展史上的第二座里程碑。

1968年，中国形式逻辑研究会理事、北京开关厂工程师林邦谨创立了一门新的逻辑学说——制约逻辑，向前两座丰碑提出了挑战。1978年，在我国逻辑学界元老沈有鼎教授的举荐下，经华裔美籍逻辑学家王浩教授推荐，林邦谨在美国数学会刊物《文摘》上发表论文《制约逻辑简介》。1985年12月，林邦谨的专著《制约逻辑》在国内正式出版。制约逻辑独树一帜，震动了逻辑学界，引起了国内外学者的关注。

制约逻辑是传统的形式逻辑与正统数理逻辑（现代逻辑）有机结合的产物，它运用现代逻辑提供的严格精密的数学方法，去构造一个能确切地体现传统形式逻辑的深刻正确的主导思想的非正统的逻辑制约系统。林邦谨认为，传统形式逻辑密切结合人类普通思维和自然语言实际，把从已知进入未知的推理格式作为自己的主要研究对象，坚持贯彻不许循环论证，这是它的深刻而正确的主导思想。但它对一些极简单的推理却不能从理论上加以分析，演算技术也十分简陋、陈旧，远不能满足现代的需要。正统数理逻辑系统地采用了现代数学方法，论证严谨，演算精密，但它

却舍弃了推理格式中起决定作用的非数学的逻辑含义这一精髓，将其处理成真值函数、个体一真值函数关系，因而远离了传统形式逻辑的主导思想。林邦谨大胆地综合融汇了上述两种逻辑的优点而摈弃二者之缺陷，创造出自外于传统两家的新逻辑体系——制约逻辑学说，即继承形式逻辑的正确主导思想和有效的推理格式，并采用数理逻辑所提供的数学方法来处理科学研究和社会生活中的各种逻辑问题。它是久盛不衰的传统形式逻辑的现代发展。

制约逻辑学说指出，制约关系就是刻划清楚后的充分条件关系。制约关系事实上构成了传统形式逻辑中可据以进行不循环论证的推理格式的理论核心：推理式的前后件之间必定满足普遍有效的制约关系，而在前件或后件中也必定出现制约关系。制约逻辑体系由语义学、语构学、语用学三者组成。制约逻辑语义学研究客观世界的逻辑结构和逻辑规律，而以其中的客观的制约关系和有关制约关系的客观的逻辑规律为主要研究对象。制约逻辑语构学研究刻划客观的逻辑结构和规律的表意的人工符号的机械的排列结构和变形规则。制约逻辑语用学研究在指谓同一的原则下符号语言与自然语言的互相翻译。总的说来，制约逻辑所研究的领域是：现实世界对象域上的个体、集、一元或多元函数、一元或多元关系、关系间的直值函数关系、关系间的充分条件（即制约）关系，和上述种种关系的客观规律，以及它们在意识中的反映——概念（词）、命题和推理。其中，制约（充分条件）关系为研究核心。

林邦谨在深入分析人类普通的逻辑思维实际的基础上，运用数理逻辑的演算技巧，提出了命题演算C_m系统和名词演算C_n系统。C_m中的“制约”命题$p \rightarrow q$跟p和q的真假共有七种，$p \rightarrow q$也获得三真四假的纪录。这一点与莱维斯（Lewis）的严格蕴涵一致。但C_m跟莱维斯的模态系统是有区别的。C_m系统有以下主

要特征：（1）在 C_m 中，所谓"必然"，并非某一命题的性质，而只能是两个命题间的联系。$p\to q$表示p和q之间有某种"必然"联系。（2）除了为一般模态系统所避免的象$p\to(q\to p)$等著名的蕴涵怪论以外，C_m还避免了象$p\bar{p}\to q$这一类最难避免因而为一般模态系统所容纳的蕴涵怪论。（3）跟一般模态系统不同，C_m有象$[p\to(q\to r)]\to[q\to(p\to r)]$这一类公式。（4）相当于在一般形式逻辑书中列出的传统命题逻辑推理式的定理它都具有。（5）没有象$\bar{p}(p\vee q)\to q$这一类公式。（6）凡是在传统形式逻辑中看起来好象是用了相当于被C_m排除了的二值系统中的定理的地方，C_m都有很好的处理方法。

在C_m系统的基础之上建立的C_n系统，只是扩充形式语言(引入个体变元、函数词和谓词)，而不用量词。这样不仅在技巧上可避免含有量词的形式系统所不可避免的许多麻烦，使演算的进程原则上是命题演算，而且更接近于普通逻辑思维实际。同时，C_n系统将对解决判定问题提供明朗的前景。

林邦谨在演绎推理问题上提出了两个独立性，具有逻辑性质"可独立于前后件的真假确定不会是前真而后假"的制约式定理称为第一独立性。具有逻辑性质"可在无需确定后件为真的情况下确定前件为真"的推理式定理称为第二独立性."两个独立性"是为在论证中出现的推理式所必具的确保论证不循环的逻辑精髓。这是深刻的逻辑理论观点。

国内外一些专家学者认为制约逻辑在学术和科学实践等方面有重大的意义：（1）它可以分析、处理一系列逻辑史上迄今争论不休、久悬未决的难题。对命题的真假对错、主词存在、宾词周延和演绎推理能否推出新知，已证明的结论是否已证实，以及在数学史上引起第三次数学危机的悖论等问题，都可能给出确定的解决。（2）以它为逻辑基础建立的初等数论的形式系统N，当C_n的判定问题一经解决，就可能为最终解决哥德巴赫猜想提供新的

思路。这种数论系统还可能满足相容性和完全性（与哥德尔不完全定理正好相反）。（3）制约逻辑形式化公理系统，为计算机语言创造了符号语言体系。以它作为计算机科学的逻辑理论基础，可为研究、设计新一代的内涵智能机、软件可靠性确认、程序正确性证明等方面提供新的途径。（4）以它来分析科学理论和科学创造中的逻辑机制，可使科学工作者掌握有效而实用的科学方法。

国际逻辑学界和计算机学界对制约逻辑理论非常敏感。当林邦谨的简短论文《制约逻辑简介》在美国刚发表不久，联邦德国和加拿大的大学就积极组织专家研究班进行翻译和讨论，他们认为林邦谨“构造的这种逻辑体系是重要的，因为这种逻辑与计算机科学，特别是‘判定程序’关系密切”。美国数学会秘书长利弗库博士推荐《制约逻辑》英文摘要给下届国际逻辑讨论会。第八届国际逻辑讨论会第一副主席、奥地利兰兹堡大学教授瓦因加特纳博士正式邀请林邦谨参加1987年在莫斯科举行的国际逻辑学术会议，并将作专题发言。在国内，林邦谨的制约逻辑现已引起学术界注意，国家科委于1986年在清华大学组织了高层次研讨班对制约逻辑进行剖析、探讨。

对《制约逻辑》的批评也是很尖锐、激烈的，有的还持否定的态度（郭世铭、董亦农：评《制约逻辑》中的几个形式系统，《自然辩证法通讯》1987，No.3）。他们认为制约逻辑的 C_m 系统与二十几年前国外发表的相干逻辑的命题演算R系统形式等价，而R是不可判定的，那么C_m系统亦就是不可判定的（林邦谨认为C_m和C_n是可判定的）。即使假若 C_n可判定，C_n 的判定方法用到数论系统 N 上去也无济于事，因为一阶数论是不能有穷公理化的，因此要想在C_m基础上构造一个满足完全性的初等数论的形式系统N来解决哥德巴赫猜想等问题，是完全不可能的。C_m没有语义学，更无语义可靠性和完全性。C_n 无法定义“必然”、“可

能”这类概念。C_n没有实用价值，不可能证明任何一个有意义的必然命题和可能命题。N系统既不一致，也无足够的表达能力，当然也不可能完全，而且没有可判的公理集。N系统无法定义“整数”、“素数”、“减”之类的基本数论概念，无法表示象哥德巴赫猜想这类命题。因此，N系统是一个罕见的百病缠身的系统。……

制约逻辑何处为真理，何处是谬误？对它的学术性地位将怎样作出历史性评价？究竟会有多大作为？是不是逻辑学上的一次革命？它能否经受住社会实践的检验？未来将会给予我们确切的回答。

第十七章

历史留下的启示

从本书开篇算起，我们已经翻越了近四百年的数学发展断代史，它艰难曲折、矛盾交错、兴衰离合的进程令人感慨兴叹；它博大精深的思想内容，高超精湛的方法技巧，接连不断的严峻挑战令人神往亢奋；它高度抽象的理论与具体实际的应用绝妙的结合，以及具有超前揭示客观世界规律的异乎寻常的伟力令人困惑惊奇；它严谨、精密的宏伟大厦所具备的内在美令人欣喜，而出乎意料的难以癒合的基础裂缝又使人不无隐忧；它的创造者——数学家们非凡的智慧及其勇于窥探未知世界，为真理献身的执着追求令人激动钦佩……

然而，从历史的角度来看，它还应当给我们留下些什么更可宝贵的启迪，有些什么经验、教训供我们吸取，使我们在历史的联系中发现需要探讨的课题，得出正确的见解和结论，为我国数学科学的发展提供有益的借鉴呢？

摆在我们面前的是国际数学家大会（ICM）颁发的菲尔兹（Fields）奖和由以色列颁发的国际沃尔夫（Wolf）奖获得者名单。[附一、二]这两项奖是当代数学的最高奖。ICM是世界各国数学家的盛大集会，自1897年在瑞士苏黎世举行第一届会议以来，到1986年止已经是第二十届了。除两次世界大战期间外，它每四

年召开一次。它对促进世界数学事业的发展和国际交流，发挥了重要作用。菲尔兹奖授予四十岁以下的有卓越成就的中青年数学家。从1936年在挪威举行第十届ICM会议颁发首届菲尔兹奖起，迄今已有30人获奖，其中美国16人、法国 6 人、英国 4 人、苏联2人、瑞典和意大利各1人。沃尔夫奖授予当代世界上最负盛名的大数学家，从1978年颁发首届沃尔夫奖到1984年共有14人获奖，其中美国5人，法国3人，苏联3人，西德、日本和匈牙利各1人，上述获奖者的工作，代表了半个世纪以来纯粹数学发展的主流。由此可见，当今世界数学的中心在美国，欧洲则以法国最强。

伴随社会的急剧变革，世界数学的中心也已几度转移，世界数学的主流也已几经变幻。从近代、现代数学发展的主线——德、法、美、波兰、苏联等国数学发展兴衰交替、此起彼落的变迁中，我们可看到数学这块领地与整个国家、整个民族、整个社会共命运、同盛衰；它需要学术研究上指导思想正确，方向、方法对头，更需要一个自由、和谐的学术环境。

Ⅰ. 哥廷根的兴衰与美国的胜利

20世纪初，德国数学发展到鼎盛时期，哥廷根(Göttingen)大学成了举世瞩目的的数学中心和数学家的摇篮

18世纪下半叶至19世纪前半叶，数学的中心还在法国巴黎。从19世纪中叶起，由于拿破仑三世的反动统治，法国政治黑暗，社会动荡，导致了数学及整个科学的跌落。而普法战争后，德国获得统一，促进了数学的飞速发展，进入了兴盛时期。19 世纪初，年轻的数学家高斯开辟了世界数学的新纪元。由高斯、雅可比、狄里克雷、黎曼、代德金、康托尔、克罗内克、维尔斯特拉斯、库莫尔等所做出的一系列卓越的开创性工作，使德国数学取

代法国数学的主导作用和中心地位。1855年，狄里克雷接替了高斯在哥廷根的工作后，创建了以他和黎曼等人为首的哥廷根学派。同时，维尔斯特拉斯、库莫尔、克罗内克“三巨头”也把许多有才能的学生吸引到柏林大学，形成了柏林学派。柏林学派于19世纪末因“三巨头”逝世而瓦解之后，哥廷根学派在黎曼领导下日益繁荣兴旺。20世纪初，大数学家克莱茵、希尔伯特、闵可夫斯基主持哥廷根工作，聚集了象韦尔、E·诺特、阿廷、龙格、海林格、布拉须盖、柯朗、西格尔、托普利兹、施密特、哈塞等一批蜚声数坛的大数学家，以及象普朗克、玻恩、薛定锷、海森堡这样一批大物理学家。哥廷根是有民主传统的学府，学术上百家争鸣，自由驰骋，师生之间相互交流，宽松融洽。值得一提的是，在数学基础的大论战中，希尔伯特最器重的学生韦尔公开宣布拥护布劳威尔的直觉主义，同希尔伯特激烈论战。学术上的争论并未影响他们的师生情谊，希尔伯特以宽广的胸怀，退休时仍将韦尔选作自己的继承人。在民主风气的熏陶下，哥廷根学派开创了一系列崭新的领域、崭新的思想和崭新的方法，他们的杰出成就主导着世界数学的发展。形成数学学派的基础，并不限于共同的研究方向，而且有共同的指导研究工作的哲学观点。哥廷根学派关于数学统一性的思想，在很大程度上决定了学派数学工作的特色，而且对20世纪的数学发展和数学教育都产生过重大影响。哥廷根学派重视纯粹数学和应用数学，把理论和工程技术结合起来的科学传统，深刻地揭示了数学和自然科学的兴旺之路，具有深远的意义。一大批国外有作为的年轻数学家，象朝圣一样纷纷涌向哥廷根，其中有荷兰的范·德·瓦尔登，美籍匈牙利学者冯·诺伊曼，美国的维纳、哈尔，瑞士的霍甫，苏联的乌利松、亚力山大洛夫、斯密特、斯捷潘诺夫、切波塔约夫，波兰的夕尔宾斯基、斯坦因豪斯、马祖凯维奇，日本的高木贞治、正田建次郎、末纲恕一，法国的魏依、歇瓦莱、厄布朗，中国的曾炯

之，等等。他们得以在当时世界数学的最前沿接受新鲜思想和洞察世界数学主流及其发展趋势。日后，这些游学者、留学生大多取得了出类拔萃的成就，对他们各自国家的数学新生和中兴，对世界数学主流都产生了极其重大的影响。波兰数学的崛起，苏联数学的飞跃，布尔巴基学派的兴盛，日本数学后来居上，美国数学在第二次世界大战后称雄世界，都分别与上述人物密切关联，范．德·瓦尔登的《代数学》、霍甫的《拓扑学》是一代经典名著，它们是哥廷根学派思想的延续和发展。哥廷根不愧为20世纪初世界数学家的摇篮和一代数学圣地，人们高度赞誉它是“数学的麦加”。

然而，1933年希特勒上台，使兴旺发达的德国科学毁于一旦。哥廷根的大多数成员如韦尔、哥德尔、西格尔、阿廷、柯朗、诺特、冯·诺伊曼、费勒（随机过程创始人之一）、德恩（希尔伯特第3问题解决者）等，还有大科学家爱因斯坦、弗兰克等被迫流亡美国。而留在德国本土的数学家有的被关进集中营，甚至被迫害致死。如拓扑空间理论的奠基人豪斯多夫夫妇被逼死，著名数论专家兰朵一直遭受打击迫害。有的不过问政治，埋头学问，在艰难的环境里坚持研究，如维特（E·Witt）研究李代数和二次型，克鲁尔（Krull）研究交换环，道凌（M·Deuring)研究代数学都取得了突出成就。有的成了法西斯纳粹分子，例如著名数学家比贝尔巴赫主张把“元首原则”搬到数学界，根据法西斯的种族理论和政治原则选拔数学家，对犹太人数学家如柯朗等进行无耻的迫害。而著名代数学家哈塞（Hasse）因强烈的保守的民族主义思想而终于依附纳粹成为法西斯走卒。哥廷根从此彻底衰落，德国数学也自此一蹶不振。五十年代以后，一批青年数学家成长起来，但所取得的成果已无法与昔日的辉煌业绩相比。目前，新一代德国数学家正在筹划新的复兴。最典型的事例就是1983年西德乌珀塔尔大学的法尔廷斯用代数几何学证明了数论中

六十年未能解决的莫德尔猜想，为彻底解决三百五十年前提出的费尔马大定理铺平了道路，从而荣获1986年第11届菲尔兹奖。

美国的数学水平在第二次世界大战前远不如欧洲大陆，每年都有一大批学生留学哥廷根和巴黎。1862—1934年间，美国有114名数学博士，其中就有34名留学于哥廷根，18名留学于莱比锡和慕尼黑。当然，出现在美国本土的具有第一流水平的数学家也有一些，早期的如吉布斯奠基向量分析和统计力学，G·伯克霍夫建立了微分方程定性理论方面的动力系统理论和抽象代数学的格论，系统地论述了各态历经理论。三十年代起出现了一批有重大影响的成果：道格拉斯解决普拉托极小曲面问题荣获第1届菲尔兹奖；霍杰引入调和积分概念来研究代数流形，为研究同调性质提供了分析工具；莫尔斯创建大范围变分学理论，为微分几何、微分拓扑提供了有效工具；惠特尼证明了微分流形浸入定理，正式创立微分拓扑学，惠特尼后来还在纤维丛概念的引入、微分几何学中微分流形联络、奇点问题和上同调环问题等方面做出了重大成就，荣获1982年第5届沃尔夫奖；查瑞斯基把克鲁尔的广义赋值论应用到代数几何、特别是双有理变换上，为代数几何学奠定了基础，并做出了实质性贡献。1981年，查瑞斯基荣获第4届国际沃尔夫奖。

由于德、波、匈、奥（地利）、法国一大批卓越的数学家以及其他科学家纷纷流亡美国，使美国迅速成为战后的数学强国和世界数学中心。这批数学家成了美国数学的中坚，例如柯朗把建设哥廷根数学研究所的经验带到美国，组建了第一流的纽约大学数学和力学研究所，在研究空气动力学和激波中做出了重大成就。柯朗还培养了如象拉克斯（匈牙利人，专长偏微分方程）、尼伦伯格（加拿大人，专长非线性问题）等后起之秀。任普林斯顿大学访问教授的冯·诺伊曼不仅成为一名登峰造极的纯粹数学家，而且他和流亡美国的波兰数学家乌拉姆还是研究原子弹、氢弹和电

子计算机的关键人物。冯·诺伊曼既是一代数学巨匠，又是美国政府的高级顾问，曾荣膺总统授予的"海军杰出服务勋章"和"自由勋章"。美国导弹计划发起人之一的乌拉姆（著名拓扑学家，专长范畴论、测度论）则是美国总统科学顾问委员会的顾问。哥德尔1940年在美国普林斯顿高级研究所证明了连续统假设在ZF集合论系统中的相容性，再度轰动世界。对李群作出过重要贡献的韦尔在普林斯顿继续自己的研究，一生中写下了150种书和重要论文，提出了一系列新思想、新方法，成为本世纪最杰出的数学家之一。他的《空间·时间与物质》以及正交射影方法的理论，对日本著名数学家小平邦彦产生了巨大影响。1948年小平邦彦应韦尔之邀到普林斯顿，在韦尔指导和影响下开始了高产时期，对调和积分论、代数几何学、复解析几何学都做出了重大成就。小平邦彦与法国代数拓扑学家、代数几何学家、代数数论专家、复解析几何学家塞尔同获1954年菲尔兹奖，并与美籍德国数学家H·勒维共同成为1984年第七届沃尔夫奖得主。法国布尔巴基学派创始人魏依、歇瓦莱也在普林斯顿分别对代数几何学、类域论的算术化、代数函数论、李群论、局部环等领域取得了使许多数学家赞叹不已的成就，对20世纪数学产生了极大影响。魏依和歇瓦莱分别荣获美国1980年斯蒂尔奖和1941年第四届科尔（Cole）代数奖和数论奖。魏依还和法国非线性泛函分析不动点理论专家、代数几何学家、代数拓扑学家勒瑞同获1979年第二届沃尔夫奖。中国数学家陈省身、周炜良、林家翘等也于四十年代抗日战争期间赴普林斯顿，得到了韦尔的指导。林家翘对湍流作出出色研究，由一个纯粹数学家转变为著名的应用数学家，现为美国应用数学学会主席，美国科学院院士。周炜良同小平邦彦合作，发展了微分几何学复流形理论，并对代数几何学代数簇理论作出了重要贡献。陈省身奠基纤维丛理论，引进了在整个纯粹数学中都有重要应用的"陈省身示性类"，创立了现代大范围微分几何，并在积分几

何、网几何、复流形和极小子流形等方面都有重大贡献。魏依高度评价陈省身的工作："假如没有E·嘉当、海因茨·霍甫、陈省身和另外几个人的几何构想，本世纪的数学是不可能有它的惊人进展的。"国际数学界称陈省身是"当代还活着的最伟大的几何学家"。陈省身于1970年和1983年分别获美国数学会颁发的卡文内特（Chavenet）奖和斯蒂尔（Steele）奖，1976年获美国国家科学奖章，1983年荣获国际沃尔夫奖。在1984年退休前，陈省身任美国国家数学研究所所长，他和魏依都是美国科学院院士。罗马尼亚出生的沃德，1938年德国法西斯侵入奥地利时被关进集中营，不久美国设法把他营救出来。沃德到美国后转行搞统计，他根据军方实弹试验需要于1943年首创序贯分析和决策函数理论，开创了统计学的新方向，成为本世纪最杰出的统计学家之一。匈牙利著名数学家波利亚、舍荷、拉多、爱华德、德拜、诺尔德赫姆、威格纳，波兰著名代数拓扑学家爱伦伯格、逻辑学家塔斯基、调和分析学家齐格蒙特、分析学家卡克、泛函分析学家阿隆查恩、统计学家奈曼以及乌拉姆等都来到美国。爱伦伯格与美国数学家桑·麦克伦1948年创立了范畴论，波利亚是当今深孚众望的数学家、教育家。他1940年移居美国，1942年起任斯坦福大学教授，一生发表过二百多篇论文和许多专著，在数学的广阔领域里有极深造诣。他的名著《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》曾风靡美国。他和舍荷合著的《分析中的定理与问题》是本世纪最重要最有特色的分析教科书。拉多对复变函数论、测度论有重大贡献，与道格拉斯同时独立地解决了极小曲面的普拉托问题。波利亚和拉多都是美国普特南数学竞赛三人委员会的成员。普特南竞赛是美国数学会1938年起组织的大学低年级数学比赛，选拔了很多有名的数学人才。例如米尔诺1956年证明了存在与7维球同胚但不微分同胚的微分流形，称为"怪球"，获1962年第五届菲尔兹奖。奎伦在同调理论、代数K理论、复配边理论与形式群

理论、同调代数——有限群的上同调论等领域贡献卓越，解决了K理论中著名的“亚当斯猜想”和某些抽象空间结构问题的“塞尔猜想”，获1978年第九届菲尔兹奖，此外，著名大物理学家爱因斯坦以及四十年代赴美的著名中国物理学家杨振宁、李政道、吴剑雄、袁家骝、丁肇中等对美国高能物理无与伦比的成就，则是众所周知的了。由于在第二次世界大战中，美国收留了大批杰出的数（科）学家（仅德、奥两国移居世界各地2000名科学家中，就大部分到美国。据统计，当代美国将近半数的优秀科学家实际上是外国人。从1949～1972年，移居美国的高级科技人才达20万人），从而使美国整个数学面貌发生了巨变，并从此居世界数学中心的地位。美国数学的胜利，是夺取人才的胜利。实行开明的人才政策，善于汇集人才——这就是美国一跃而为世界数学魁首的“奥秘”。

Ⅱ. 波兰数学的中兴
——独树一帜，异军突起

本世纪20年代，随着第一次世界大战结束，默默无闻的波兰数学异军突起，独树一帜，在点集拓扑学和泛函分析方面跃居世界主导地位，创造了震惊国际数学界的成就。波兰数学中兴的经验主要有两条：一是自觉地、有计划地形成学派；二是发扬了高度的独创精神，敢于自成体系跻身于世界数学研究中心之林。

第一次世界大战后，在法国巴黎大学从师于庞加莱、勒贝格、弗雷歇的雅尼斯柴夫斯基（Janiszewski ？～1920），在德国哥廷根留学的夕尔宾斯基（Sierpinski 1882—1969）、马祖凯维奇（Mazurkiewicz 1888～1945）、斯坦因豪斯（Steinhaus 1887—1972）等先后回国。针对波兰战前文化摧残殆尽，战

后民族复兴中数学研究力量分散，研究方向各异的孤军奋战局面，雅尼斯柴夫斯基于1918年发表了形成波兰数学学派的纲领性文件《波兰急需数学》。他高瞻远瞩地阐述了发展波兰数学的指导思想。法国函数论对老一代波兰数学家曾产生过重要的影响，但那种亦步亦趋、受缚于人的状况为当时正才华出众、创造力旺盛的年青数学家雅尼斯柴夫斯基所不容忍，他开宗明义地指出波兰数学家不能“只充当外国数学中心的仆从或掮客，而一定能为波兰的数学赢得特殊的地位。”为了达到这一目标，他提出了一系列重要措施，表现了高度的独创精神。其一是集中力量于某个科研方向，对这个包括集合论（拓扑学在内）和数学基础（数理逻辑在内）的相对狭小的数学领域，波兰数学家应有共同的兴趣，并要做出具有世界水平的工作。雅尼斯柴夫斯基指出，“处于孤立状态的个人会迷失方向”，“孤立的研究者比起研究集团中的人来，将变得孤陋寡闻。他能接触到的只是他人研究的最后成果以及完全成熟的思想，而且连这点也往往要等到几年后当它们发表后才办得到。孤立的研究者不知道这些成果是何时得到的，又是怎样获得的：他没跟它们的作者一起经历整个创造过程。由于我们远离生产数学的锻炉或熔锅，起步又晚，所以不可避免地落在了后面。”他号召：“假如我们不甘‘落后’，那就必须采取果断的紧急措施，从根本上解决问题，我们必须在自己国内创造一个锻炉！”为了使波兰数学在世界上取得独立地位，他建议除了集中科学队伍之外，还应创办由波兰数学家自己选定的一个数学领域里的国际性杂志——用世界通用的语言出版，刊登与集合论和数学基础有关的文章。雅尼斯柴夫斯基以令人称赞的胆略和远见，冲破了波兰学者专用波兰文发表文章的陈规，为波兰数学走向世界描绘了一幅美好远景。经过半个世纪的实践，这个为工作集体着意设想的计划居然全部实现，恐怕在科学史上也是绝无仅有的。

雅尼斯柴夫斯基的思想大大激发了波兰数学家的能动性，很快就形成了华沙（Warsaw）数学学派和里沃夫（Lwów）数学学派两大学术派别——以讨论班为形式的研究集体。

华沙学派以华沙大学教授雅尼斯柴夫斯基（1920年1月3日患流感逝世）、夕尔宾斯基和马祖凯维奇为首，主攻目标是集合论、点集拓扑、数理逻辑和数学基础。他们于1920年创办著名的国际性杂志《数学基础》，颇有见地地用外语发表了许多经典性论文，引起了国际上的广泛重视。他们的工作发展了现代点集论，并使点集拓扑学得以系统化，当代拓扑学的兴起和发展——基本概念、方法和定理，有相当大的部分来源于波兰华沙学派。他们的工作推动了数理逻辑和数学基础的发展，例如阐明了策梅罗公理和连续统假设的作用，以及对演绎理论的贡献和在数学系统中开创一般化的研究，逻辑量词法在拓扑和描述集合论中的应用，以及拓扑中的"范畴"方法在实变函数论和复变函数论中的应用等。到三十年代，华沙学派涌现了一大批优秀数学家。拓扑学方面有波尔舒克（K. Borsuk）、爱伦伯格（S. Eilenberg）、克拉斯特尔（B. Knaster）、斯特拉斯泽维奇（S. Straszewicz）和査冉克维奇（K. Zarankiewicz）等人；集合论和实函数论方面有林登鲍姆（A. Lindenbaum）、马尔泽夫斯基（E. Marczewski）、莫斯托夫斯基（A. Mostowski）、卢泽维奇（S. Ruziewicz，里沃夫大学教授）、萨克斯（S. Saks），以及在二十年代就是华沙学派骨干成员，日后享誉世界的库拉托夫斯基（K. Kuratowski，著名拓扑学家）、齐格蒙德（A. Zygmund，以三角级数论成就名扬世界）和塔斯基（A. Tarski，数学基础方面的第一流数学家）。

里沃夫学派以里沃夫技术大学教授巴拿赫（S. Banach）、斯坦因豪斯(H. Steinhaus)为中坚，成员有乌拉姆(S. Ulam)、马祖（Mazur）、肖德尔（Schauder）、奥里奇（Orlicz）、卡克

（M. Kac）等极富创造力的高手。里沃夫学派以其出色的研究活动，跃居为当时世界最重要的泛函分析研究中心。巴拿赫和他的学生们（特别是马祖、肖德尔和奥里奇）对泛函分析的发展作出了重大贡献。巴拿赫于1922年在《数学基础》上发表的博士论文是泛函分析的奠基性文章，在20世纪数学史上有决定性意义。1929年，巴拿赫发表泛函分析的基础性经典著作——《线性算子理论》，把他本人得到的基本结果和过去已有的成果（有些属于他的学生）系统化为一个统一的理论。在里沃夫学派兴起之前，意大利数学家伏尔泰拉和法国数学家弗雷歇、匈牙利数学家F. 黎斯等人对泛函分析的基本定义和思想虽已作了系统的论述，但泛函分析之所以能够被确立为现代数学中最强有力的新分支，理当归功于巴拿赫为首的里沃夫学派。他们在引进和发展泛函分析的基本概念、方法和定理方面起了主导作用。马祖于三十年代末发现函数空间的代数结构，发展了巴拿赫赋范环理论。肖德尔的主要成就在于把拓扑学上的某些概念和定理搬到巴拿赫空间上（例如，不动点定理、区域不变性、指数概念等），他还开创了微分方程理论中一个极富成果的方法——肖德尔方法。肖德尔曾于三十年代在巴黎与J. 勒瑞合作研究泛函分析的不动点理论，这一合作使这两位数学家在1938年荣获Metaxas国际大奖。里沃夫学派的代表乌拉姆，是一位才气焕发、能力过人的天才，他学识广博、多才多艺，很难把他归类为某一个数学分支的专家。二次大战前，他在波兰与巴拿赫、斯坦因豪斯、卢宾诺维奇、波尔舒克等人合作，在拓扑学、测度论等领域取得了十分出色的成就，二次大战期间到美国后与冯·诺伊曼合作，从事原子弹、电子计算机方面的研究。库拉托夫斯基在其数学史书《波兰数学五十年》中认为："乌拉姆是我的最重要的'发现'之一。"

里沃夫学派的研究方式十分有趣。他们聚集在苏格兰咖啡馆里边喝咖啡边讨论问题，特别是巴拿赫一天生活中的相当大一部

分时间消磨在咖啡馆，与围坐在周围的同事和年轻的同行滔滔不绝地讨论和分析他本人想到的问题。这种亲密无间的合作方式成了数学家们从事真正数学研究的最基本的要素。数学家们在频繁的会面中，提出了大量新问题，他们把提出的问题和结论记在记录簿上并寄存在咖啡馆侍者手中。由于巴拿赫夫人的功劳，这些记录居然奇迹般地在二次大战的战火中幸存下来，后被整编成《苏格兰文集》出版，在1958年召开的国际数学家大会上引起了轰动。这部具有重要的科学与历史价值的文献里面，有许多问题至今未获解决。大量的优秀成果就出自这样不可思议的，但却又是相当有利的环境——集中力量研究问题，使得数学家彼此交流、相互启迪，新的问题、新的发现在讨论中不断涌现。这种奇特而有效的研究方式后来为法国布尔巴基学派效法。

波兰重新独立后，在数学的初创阶段，除了华沙和里沃夫这两个最活跃的数学中心之外，在克拉科(Cracow)、维尔诺(Wilno)和波兹兰(Poznan)等地也集中了许多数学家，形成了数学研究中心。在第一次世界大战结束前后的那些年代，波兰数学会开始创建并扩展到所有数学研究中心。学会与高等院校一起，为赢得波兰数学在国际学术界的稳固地位发挥了重要作用。具有联盟性质的波兰数学会，从1919—1939年二十年间提出学术报告共1143份，其中的许多文章都有持久、重要的影响。当时，波兰各地数学分会的学术活动十分频繁：几乎所有学会成员的科研成果都要在每周举行的地方分会学术会议上报告，这就形成了一个真正有利于数学发展的温床，使全国性的学术活动富有刺激力和活力。波兰数学学派特别重视出版活动，每一处重要的数学研究中心都有自己的杂志。1931年，创办了数学专著丛书，这被看作是对波兰数学具有特殊重要意义的大事，它标志着波兰数学初创期结束而跃入了一个新的发展时期。计划出版的主要专著有巴拿赫的泛函分析，萨克斯的积分理论，夕尔宾斯基的连续统假设，

齐格蒙德的三角级数论，斯坦因豪斯和卡奇马尔日（Kaczmarz）的正交级数论。"数学专著丛书"很快就跻身于最受尊敬的科学出版物之列。

波兰学派在强调在波兰本土创建数学"熔炉"，在世界上取得独立地位之时，并不将自己囿于狭小天地而自我封闭，他们十分重视与国外数学家的合作、联系和交流。《数学基础》、《数学研究》和《算术学报》都成了国际性的专业杂志，它吸引了世界各国的学者，国外来稿每年稳步增加，促进了国际合作。

在拓扑学和泛函分析取得国际领先地位后，波兰学派又于1937年召开波兰数学大会，在《波兰数学的现状和需要》这个报告中计划有步骤地加强分析、代数和几何的研究工作，并制定了使应用数学跻身先进行列的规划。这是波兰数学学派反思15年历程中的得失之后，大胆地迈进过去被忽略或完全没有开发的新领域所作的首次尝试。

然而，上述诸计划还未来得及着手实施，二次大战爆发。1939年9月，波兰沦陷。死于战争的数学家几乎达半，例如齐格蒙德在维尔诺时最优秀的学生马辛克维奇（Marcin kiewicz）——波兰年青一代中最富才干的分析学家之一，1940年在战火中丧生；肖德尔遭受纳粹的迫害，于1943年去世。巴拿赫也只能在一个研究所里养虱子。只有少数幸运者如乌拉姆、爱伦伯格、齐格蒙德、塔斯基、卡克、阿隆查恩等流亡到美国等地继续从事研究工作。齐格蒙德1940年起在美国当教授，桃李满天下。卡克是斯坦因豪斯的学生，后来成为美国多所大学的知名教授，他专长分析及概率论，因对统计力学和概率论及其应用的贡献而荣获美国1978年第五届G．D．伯克霍夫应用数学奖。

战后，幸存于世的夕尔宾斯基、斯坦因豪斯、库拉托夫斯基着手重振波兰数学。今天，波兰虽然再也没有象巴拿赫那样的数学大师了，但波兰数学学派的光荣传统被继承了下来，并又重新

具备了相当的实力，它的数学发展规模居当今世界前列。波兰数学学派在两次世界大战之间的二十年崛起于世的经验，为数学史谱写了颇富教益的篇章。

Ⅲ. 布尔巴基学派
——年轻开拓者重建数学

数学，是年轻人的科学。

20世纪三十年代，一个以布尔巴基（Bourbaki）为笔名的青年数学家集团诞生在法国巴黎，在沉闷的法兰西数学界掀起了波澜。这批年轻的开拓者，在十分困难的条件下成长壮大，并以大无畏的批判精神作出了用数学结构的观念和公理化方法整理、概括全部现代数学这一庄严选择。"布尔巴基运动"曾席卷法国，风靡欧美，历几十年而不衰，不仅复兴了法国数学，使之在第二次大战后保持世界先进水平，而且对整个现代数学产生了巨大的影响。

法国数学有过光辉灿烂的成就，也有过痛苦曲折的历史。法国是近代变量数学的策源地，17世纪建立变量数学的新思想在法国广泛传播后，才输出到西欧其它国家。众所周知的费尔马、帕斯卡、笛卡尔为变量数学的发展建树了不朽的丰碑。到18世纪下半叶，拉格朗日、拉普拉斯、克雷洛、赫尔曼、棣莫弗、范德蒙、达朗贝尔、别朱、卡诺等的杰出成就，使法国成了当时国际数学界的中心。法国大革命后，政府积极兴办大学，造就了勒让德、蒙日、普阿松和傅里叶等一批大数学家。傅里叶、伽罗瓦、彭色列、柯西对19世纪前半叶的数学作出了无与匹敌的贡献。而19世纪中叶至末期，由于拿破仑三世的反动统治，政治危机日益加深，致使科学停滞不前，数学中心的王冠被德国哥廷根大学摘

取。19世纪末至20世纪初，法国进入政治上相对稳定的第三共和国时期，科学逐渐复苏，一代名家庞加莱、阿达玛、毕卡尔、波雷尔、勒贝格、拜尔、蒙代尔、邓若瓦的创造性工作，使法国重新又成为世界数学中心之一，以“函数论王国”屹立于世。

但是，第一次世界大战给法国科学事业带来了灾难性的破坏。当德国政府把他们的学生留在后方致力于提高德军战斗力的科学研究时，法国却将年轻的科学家和大学生送上前线，其后果是三分之二的青年科学家毁于战争。战后，虽然阿达玛、毕卡尔、蒙代尔、邓若瓦、勒贝格等老一辈数学家尚且在世，但年事已高，在他们和战后新一代大学生之间有整整一代人的断层。老头子们只知道他年轻时的函数论，而对数学的新发展却只有一些模糊的概念，除E．嘉当对微分几何与李群理论的开创性研究超出同时代水平20年而不曾被人理解外，法国完全封闭在函数论的小天地里而落伍于世界数学主流。

布尔巴基的奠基人魏依、歇瓦莱等先后游学国外，接触到阿廷、E·诺特、克鲁尔、哈塞和范·德·瓦尔登为代表的德国抽象代数和代数数论学派，以夕尔宾斯基、斯坦因豪斯和巴拿赫为首的研究拓扑学和泛函分析的波兰学派，以及意大利代数几何学派和泛函分析学派。他们发现如果墨守函数论成规，则法国数学必然走进死胡同。他们强烈希望恢复法国数学的光荣，从零开始，为当时纯数学中的所有理论奠定基础。这个以讨论班为形式的数学学派，不断吸收新的年轻成员补充新鲜血液，而且不成文地规定50岁时必须退出，即使被保留参加讨论，也不能再作报告，以此保证学派对新事物的敏感。布尔巴基学派旺盛期历30余年之久，至今已持续三、四代之多。象这样长期有效的科研合作团体，在科学史是罕见的。

布尔巴基的成功之道在于年轻人的开拓和拼搏精神。假如他们的奠基者当初年纪再大一些，经验再多一些，从而能预测到把

整个数学写成一套《数学原理》并非轻易之事，所需时间至少是30年以上而不是计划中的3年的话，那么，布尔巴基连同它的事业就永远也不会迈出第一步。

他们将目光瞄准世界先进水平，在困难的条件下以坚定的信念和高度的热情进行工作，决心发动“革命”以振兴法兰西数学。

他们密切注视国外新动态，尽量争取机会到国外学习，掌握数学发展的第一手资料，系统地研讨、整理来自各方面的大量新观念。

他们对当时已十分庞大，内容极其丰富，错综复杂、相互制约的各门数学分支进行了细致的分析研究，用批判的眼光来审度一切。1890年至1930年前后，几乎所有的数学领域都在飞速进展，新理论不断涌现。布尔巴基认为对这个时期的数学进展作一番清理显然是当务之急，他们设想以某种“朴素的”集合论作为出发点，即由策梅罗所定义、由弗兰克尔和斯科勒姆完成的公理集合论为出发点为整个数学奠定基础。

他们每年聚会二、三次，热烈争鸣、严谨治学，所有的文稿都要在研讨会上经受毫不留情的批评，一本书要反复讨论、精心修改，历时七、八年甚至上十年才送交付印。仅《数学原理》第一部分就花了30年才出版完。目前，这套丛书已出版40余册，其中有：《集合论》4卷，《代数学》7卷，《一般拓扑学》6卷，《一元实函数》2卷，《线性拓扑空间》3卷，《积分学》4卷，《李群与李代数》4卷，《交换代数》4卷、《微分流形与解析流形》，《同伦代数》，《紧致李群》，《诺特环的维数论》，《谱理论》等。布尔巴基原想把这套丛书作为数学家的“工具箱”，因而对内容的选择安排是深思熟虑、苦心孤诣的：一个定理，即便是有名的定理（例如创造了伽罗瓦理论的“伽罗瓦根式可解性判别法则”），如果没有新的应用的可能性，即本质上已

经走入了死胡同，就不予收录。这些无疑展现了布尔巴基严谨朴实的学风。

布尔巴基受到希尔伯特形式主义和自代德金到阿廷、E·诺特、范·德·瓦尔登为代表的德国代数和数论学派的强烈影响，受到庞加莱和E·嘉当的深刻熏陶。虽然这些大数学家无论就其风格还是研究领域而言，彼此都十分不同，但对数学却有共同的哲学观——试图用涉及“抽象的”新概念的方法去解决经典问题。这种思想为布尔巴基所继承并发展，成为其指导思想。他们不再承认传统的数学秩序，否定以代数、分析、数论、几何等相互隔离的区域来对数学进行截然划分，他们确信传统的按照所研究的数学对象来对学科进行分类的数学分类法实际上不符合这门学科的本质。布尔巴基不关心对象本身是数或形或函数或运算等所谓对象的性质，而是它们的相互关系，因而布尔巴基的基本指导思想是结构主义。基于结构思想的分类观点在1840年前后已经出现：群、环、域、向量空间等基本的抽象结构，为处理各种数学对象的许多貌似无关的理论奠定基础，利用这些代数结构的简单的一般性质，往往轻而易举地得到以前由一些复杂的论证和计算证得的结果。布尔巴基将数学视为一门结构科学，全部数学是基于抽象集合上的三种“基本结构”（亦称“母结构”）：代数结构、拓扑结构和序结构。在任何一个母结构中附加一条或几条补充公理，就得到一些子结构。把两种以上不同类型的结构有机结合，就产生复结构。例如，在群的公理结构中，附加有限的规定，就得到有限群的结构；代数结构与序结构相结合产生布尔代数；代数结构与拓扑结构相结合产生拓扑群，等等。这些结构由简单到复杂，由一般到特殊，形成一整套层次分明的系统而包容全部数学。40册的《数学原理》始终都贯穿了结构的思想。

布尔巴基的选择是与以前的数学观念大相径庭的“冒险”，但又是卓有远见的事业，是一项宏伟、艰巨的工程。但是，他们

抓住了矛盾的关键——突出统一性（他们认识到数学的基本的统一性被它的各个部分之间迥异的外貌所掩盖），使内容庞杂的现代数学之大部，在其公理化方法和结构观点之下，组织成井然有序、相互关联的统一体。布尔巴基向传统观念挑战，显示出了坚定、勇敢、沉着的胆略和气魄。《数学原理》开篇首先讨论三种基本结构的一般性质，甚至在拓扑群理论将这三种结构结合起来之后，才在第三卷中介绍实数。布尔巴基的结构思想，有重大的哲学意义，是对现代数学的一大贡献。《数学原理》产生了巨大影响，成了新的“经典”。《代数》中关于模的对偶和多重线性代数这两项理论是整个数学的基础理论，然而这两项理论在范·德·瓦尔登的《代数学》中是找不到的，特别是，这本书第一个对格拉斯曼外代数给出完善而系统的阐述；《一般拓扑学》是第一个讨论滤子、一致空间、拓扑群和函数空间的文献；关于拓扑向量空间的一卷，则是局部凸空间的第一本教科书，它包含了巴拿赫的名著中证明的一切结果，但是提法更为一般、更加有用，这一卷还包含了把拓扑向量空间应用于现代分布理论和偏微分方程所必需的全部工具。……布尔巴基的声誉在五十至六十年代达到了顶峰，他们所研讨的问题都是当时数学的前沿，从而为世界注目。

布尔巴基以坚定的信念和特殊的工作作风，造就了数代杰出的开拓型数学家，他们在数学的各个领域都做出了十分重要的贡献，多人成为所研究领域的权威。法国5名菲尔兹奖获得者中就有4名是布尔巴基成员——施瓦兹（广义函数奠基人，写有划时代著作《分布论》，对泛函分析、概率论和偏微分方程也作出了贡献）、塞尔（代数拓扑、同调代数、代数几何学、复流形、代数数论等，著有《凝聚代数层》、《代数几何学与解析几何学》两篇近代经典文献，是一位全才）、格罗申第克（建立了代数几何学抽象庞大的体系，并用它解决了许多著名猜想和难题，写有

“概型论”体系的10多册巨著；在泛函分析中引入“核空间”、“张量积”)、德利涅（1973年解决了数论中最引人注目的“魏依猜想”——此猜想1949年提出，把代数几何学推向高峰，揭示了特征p的域上流形理论与古典代数几何之间的深刻联系，这是七十年代纯粹数学的最大成就）。另一位法国获奖者托姆也是在布尔巴基主要成员H·嘉当和艾瑞斯曼的培养下成长起来的，他是轰动世界的“突变理论”和拓扑学“协边理论”的创建者。布尔巴基的早期成员魏依、勒瑞和H·嘉当则分别荣获第二、三届国际Wolf奖。魏依在泛函分析、代数数论、多复变函数论、代数函数论、代数簇上的算术、有限群、数论、微分方程动力系统等领域造诣颇深，特别是对微分几何和代数几何做出了奠基性的贡献。他于1941年赴美国，现为美国科学院国外院士。勒瑞对泛函分析不动点理论、微分算子、同调代数层理论、谱序列理论、多复变函数等，H·嘉当对代数拓扑学、同调代数、位势理论、多复变函数等，都分别作出了驰名的贡献。

七十年代分析数学、应用数学、计算数学的重大发展和“构造主义”的再度新生，促使数学的发展由布尔巴基所指引的抽象的、结构主义的道路转向具体的、构造主义的、与计算机相结合的道路，从而结束了布尔巴基学派的黄金时代。但至今还看不出它有任何解体的迹象。每年三次的“布尔巴基讨论班”照样在庞加莱学院举行，它也许是当今世界上唯一讨论当代数学重要进展的讨论班，许多国内外学者慕名而来。应该说，布尔巴基已经出色地完成了它的历史使命。它给人类留下的数学遗产和可贵的开拓精神，为现代数学史谱写了光辉的篇章。布尔巴基的事业，激励着后辈青年在数学的险峰上奋力攀登！

Ⅳ. 尖端发展与基础教育——苏联数学称雄世界

自六十年代以来，苏联数学再次称雄世界，成为当今世界数学的中心之一。

苏联具有优良的数学传统。早在18世纪，俄国彼得一世就非常重视文化建设的改革，他大力发展学校事业，并与莱布尼兹一起建立了彼得堡科学院，以培养俄罗斯自己的科学家。科学院在许多领域很快地达到了当时西方最有名望的科学院的水平。18世纪最伟大的科学家欧拉，以及贝努里家族的丹尼尔和尼古拉，都曾长期在这里工作。欧拉以独创性的科学和教学法思想培养了许多天才的数学家，创建了最早的俄罗斯数学学派——欧拉学派。18世纪的成就，扭转了17世纪时俄罗斯数学明显落后于西欧的状况。19世纪，罗巴契夫斯基创立非欧几何开辟了几何学新纪元，并形成喀山学派。奥斯特洛格拉德斯基、奥西波夫斯基、切贝晓夫、柯瓦列夫斯卡娅都是知名的学者，获得法兰西共和国最高勋章——荣誉团勋章的切贝晓夫，不仅在概率论、逼近论和数论等方面功绩卓著，而且还培养了大批优秀学生如马尔可夫、李雅普诺夫等，形成了彼得堡学派。马尔可夫一生著述70余种，除了在代数数论和古典分析方面有重要贡献外，还在概率论中发展了“矩方法”、扩大了极限定理的应用范围，开创了“马尔可夫过程”——一种无后效性随机过程的研究。从而把概率论推进到现代化的门槛，成为概率论现代化的先行者。李雅普诺夫以开拓了微分方程稳定性理论而扬名世界。在概率论方面，他取得了比切贝晓夫、马尔可夫更有效的、关于中心极限定理的简单而严密的证明，并由此而发现表示函数的新方法——它在现代概率论中有广

泛运用。他对位势理论的研究为数学物理方法的发展开辟了新的途径。他主要在哈尔科夫执教，使之成为俄国又一个数学中心。彼得堡学派的工作，使俄国数学从一穷二白的境地中挣扎出来，并在若干领域内跃居世界前列。该学派具有独特的研究风格：重视基础理论，善于以经典课题作为突破口；理论联系实际；擅长运用初等工具建立高深的结果；以大学为阵地，科研与教学密切结合，教学相长，相得益彰。这些风格在切贝晓夫的后继者如维诺格拉多夫（首创三角和方法研究哥德巴赫猜想）、盖尔封特（А.О.Гельфонд，1906—1968，解决希尔伯特第7问题）、柯尔莫哥洛夫（建立概率论公理化体系）、辛钦（应用连分数于差分理论和复变函数）等当代名家身上得到了发扬。十月革命后，在彼得堡的斯米尔诺夫（В.И.Cmnphob，1887—1974）为发展列宁格勒（彼得堡）学派做了不少教育工作。斯米尔诺夫对复变函数、泛函分析、弹性理论、偏微分方程、变分学、应用数学和数学史都取得了重要成果。菲赫金哥尔茨（Г.М.Фихтенгольн，1912—）则是列宁格勒函数论学派的主将。20世纪三十年代之后，康特洛维奇和盖尔芳德为列宁格勒学派这个古典分析的中心增添了新的荣耀：前者在集合论、半序空间及其泛函分析、泛函近似计算方法、算子方程的近似解等方面颇有建树，特别是开线性规划之先河并应用于国民经济研究，获诺贝尔经济学奖；后者将代数、经典分析、泛函分析巧妙地组合于一起，找出了函数空间的代数结构，发展了赋范环即巴拿赫代数理论，并在自守函数、谱分解理论、广义函数论、无限维表示论、生物数学、代数学等的研究上，获得了丰硕的成果，荣获1978年国际沃尔夫奖。

在当今世界上影响很大的还有莫斯科学派，它发展迅速，在主流数学研究中长期处于领先地位。十月革命前，当法国数学家勒贝格创立实变函数论而获得病态函数，使西方多数数学家不敢越雷池一步时，以叶果洛夫、鲁津创始的莫斯科函数论学派却颇

有远见地将之作为主攻方向，并取得了突破，从而跻身于世界数学中心之林。叶果洛夫1911年给出的关于可测函数列的收敛定理，是俄国实变函数论的发端。鲁津1906年在法国巴黎大学接触到勒贝格积分论，1912年发表可测函数的结构定理——著名的鲁津定理。十月革命后，苏维埃政府在财政经济十分困难的情况下，仍然设法对科学家给予生活上的优待，并千方百计地支持数学家与国外的交往，使苏联数学迅速发展。二十年代以来，莫斯科函数论学派取代法国跃居世界领先地位。在实变函数论成就基础上，莫斯科学派又在拓扑学、微分方程、概率论、多维微分几何、解析数论、张量分析、数理逻辑、泛函分析诸领域取得辉煌成就，在三十年代中期达到顶峰。本世纪拓扑学先驱之一的亚历山大洛夫和邦德里雅金、乌利松、吉洪诺夫等，在莫斯科大学组织了拓扑学讨论班，形成了一大批年轻人搞研究的莫斯科拓扑学派，并成为世界拓扑学领域研究的中心。而索伯列夫和柯尔莫哥洛夫、辛钦则分别是现代微分方程论和现代概率论的先驱者。柯尔莫哥洛夫是莫斯科学派最杰出的代表，他的研究领域非常广泛：概率论、函数论、集合论、泛函分析、拓扑学、数理逻辑、数学史、力学和哲学，特别是他将概率论公理化，将实变函数论、测度论和集合论引入概率论的研究中，对后世产生了巨大影响。在信息论中他把熵的理论推广到无穷维空间，具有深远的意义，柯尔莫哥洛夫因多方面的杰出成就荣获1980年国际沃尔夫奖。盲人数学家邦德里雅金也是莫斯科学派的代表，他的成就十分广泛，著名的成果有拓扑学中的邦德里雅金示性类、同位理论、连续群的表示、极值原理、振动原理，特别是1957年发现了最优控制的变分原理而名垂青史。

除莫斯科和列宁格勒学派外，有名的学派还有克拉科夫学派，喀山代数学派和敖德萨泛函分析学派等等。学派林立的苏联数学研究，范围广，成效大，几乎所有重要数学问题都涉及到

了。在许多方向处于世界领先地位。

但是，在苏联数学发展的过程中也有过一些教训，出现过一些周折。从三十年代中期至五十年代末，正当西方国家大力发展拓扑学并将之推广到其它领域而出现大范围变分学、大范围微分几何等新分支，使数学发生了新的变革时，苏联却闭关自守，拓扑学的发展每况愈下，落在了法国、美国等西方国家的后面。五十年代末，通过向国外学习，虽然作出了试图复兴的努力，而且也确实取得了一些重要的成果，但是当年莫斯科拓扑学派的兴盛景象却已不复存在了。特别是苏联把意识形态领域的阶级斗争观念强加于数学和自然科学研究，造成的许多禁锢阻碍了数学的正常发展。控制论当初被指责为"产生于西方的一门伪科学"，是"资产阶级的异端邪说"，从而在苏联长期得不到承认。应用数学也未受到足够重视而在某些方面落后于西方。例如，尽管概率论根底很深、力量强大，但数理统计却不能出类拔萃，其原因也是政治和社会性质的：把西方应用统计于社会科学单纯看成是资产阶级玩弄数字来掩盖社会矛盾的手段。线性规划虽然诞生于苏联，而大量的推广、应用却在美国。直至六十年代，一些禁锢被解除之后，一批有才华的青年数学家才脱颖而出，并确立了控制论与数学物理学并列作为基础学科的地位，邦德里雅金以及波尔坚斯基等一大批控制论专家的工作，使苏联的控制论水平后来居上，跃居世界领先地位。

苏联数学的尖端成就当然不是建筑在"沙滩"上的，而是深深扎根于基础教育，凡是数学研究活跃的地区，都是因为奠定了数学科学教育的良好基础，培育了骨干人才。苏联很重视对青年人进行严格的基础训练，从1934年起就一直举行"列宁格勒、莫斯科中学生数学竞赛"，1962年起举办全国性中学生数学竞赛，选拔优秀人才。苏联还十分重视教育改革和教育理论的研究。六十年代以前，凯洛夫教学法占统治地位，主张循序渐进的

教学原则，有其广泛影响。六十年代之后，赞可夫的教学法十分流行，它强调发展学生的观察力、思维能力和动手能力，主张高难度、高速度的教学原则。从1968年起，苏联执行现代数学教学大纲，对中学教材作了重大改变，增加了近代数学如微积分、向量、逻辑初步等内容，渗透了变换等现代数学知识。稳步地实现了改革。在大学教学中，应用数学得到加强。苏联于1974年成立高等学校问题研究所，其中设有机构专门研究高校教学过程的理论和实际问题。规定高校教师每五年要进修一次，除了本学科知识更新外，还要学习教育学和心理学。二次大战之后，苏联在各地设立了数学研究所，并成立了讨论班为形式的学术研究团体，许多大学成为数学研究的中心。同时，苏联十分注意加强不同专业学者之间的相互交往，保证科学研究的一致性和消除不必要的重复。从五十年代开始，苏联各种学术会议大幅度增加，既有广泛性（地方和全苏的），又兼顾一些较窄的研究方向。苏联十分重视广泛的国际学术交流，所有重要的会议、代表大会和学术讨论会都邀请外国学者参加，同时，派出尽可能多的数学家参加各种国际学术会议。

由于政策和指导思想的改变，六十年代以后，苏联数学发展十分迅速，成为数学上的超级大国，尤其是在七十年代在分析数学、计算数学、应用数学等方面迅猛发展，把法国抛在了后面。当今苏联数学在世界上是数一数二的，在解决世界难题方面，苏联数学家为数最多。各个新兴领域、方向上都有人才涌现。柯尔莫哥洛夫的学生普罗哈罗夫、阿诺尔德（拓扑学）以及斯科尔霍（概率论）、马古利斯（解决关于李群的离散子群的塞尔贝格猜想）、诺维科夫（微分拓扑）、哈强（发明线性规划的椭球方法）等都是蜚声世界的年轻有为的数学家，诺维科夫和马古利斯分别以卓越的成就，成为菲尔兹奖得主。

V．中国——向世界主流数学挺进

中国数学有悠久灿烂的历史。有史以来的两千多年间，特别是公元13世纪前（宋元时代），在当时占统治地位的数学各分支的许多重要领域内，一直是独立发展，遥遥领先于世界，对世界数学发展有着特殊的贡献和巨大影响。关于中国古代数学的特点、成就以及近代数学为什么没有在中国产生，我们在“中国古代解析几何与微积分思想的萌芽”一节中，已作了详尽的述评，于此不再赘述。至明、清（17世纪），西方数学开始输入中国，使中国数学开始走上现代化的道路。但由于封建制度的腐朽和帝国主义列强的侵略，中国数学到近代逐渐落伍。到20世纪初，中国数学已落后世界数学水平二百年以上！1911年的辛亥革命前后，中国大量向美国派遣留学生。1912年京师大学堂更名为北京大学，并于1918年创建中国第一个数学系，研究的科目有：秦汾的近世代数，冯祖荀的高等解析，王仁辅和叶志的近世几何，罗惠桥、金涛的应用数学，胡濬济的数学教授法。此后，一小部分在国外获得博士学位的中国数学家回国走上教学岗位，各地大学纷纷办起数学系，使中国的数学水平有所提高。例如，在美国康奈尔大学毕业并获哈佛大学博士学位后返国的姜立夫，1920年创办南开大学数学系；1921年，熊庆来和段子燮创办东南大学（现南京大学）数学系；1924年，陈建功和黄际遇创办武昌大学数学系；胡明复在上海大同大学、陈建功和苏步青先后到浙江大学、熊庆来1926年在清华大学分别创办数学系。当时的南开大学数学系是“一人系”，姜立夫靠他的博学多能，在难以想象的困难条件下培养了如刘晋年、江泽涵、申又枨、陈省身、孙本旺、吴大任等一批中国数学界的栋梁之材。然而，在当时数学是

一门自生自灭的学科，得不到应有的重视。当日本数学家高木贞治留学德国哥廷根，向大数学家希尔伯特学习代数数论后归国，并于1920年创立类域论解决希尔伯特第9问题而使日本数学跻身世界一流水平之时，中国现代数学尚未诞生。

1921年，陈建功在日本《东北数学杂志》上发表论文《关于无穷积的一些定理》，“无论在时间上或在质量上，都标志着中国现代数学的兴起”（苏步青：《陈建功选集》序言）。1928年，陈建功在日本《东京帝国学士院进展》上发表博士论文《关于具有绝对收敛傅里叶级数的函数类》，成为第一位在日本取得理学博士学位的外国科学家，这标志着中国现代数学研究首次达到国际先进水平。二十至三十年代，经过日益增多的国际学术交往，一批青年数学家脱颖而出，导致了中国现代数学发展的第一个高潮。留法归来的熊庆来对无穷级整函数和无穷级亚纯函数论；留日归来的陈建功对三角级数论；留日苏步青对仿射微分几何、一般射影曲线理论、一般空间微分几何；留英归来的华罗庚对解析数论华林问题；留德后又留法归来的陈省身对积分几何、拓扑学、微分几何中空间流形的整体性质；留英归来的许宝騄对统计推断和多元分析，取得了在国际上居较高水平的研究成果。但是，由哥廷根学派、波兰学派、苏联学派发展起来的处于世界数学主流和前沿的抽象代数、泛函分析和拓扑学，除了少数几位数学家注之外，在中国几乎无人涉及，说明这一时期的中国数学偏离世界

[注] 中国在三大领域的研究成果有：俞大维1925年在德国发表一篇关于点集拓扑的论文（这是中国最早的拓扑学论文）；留美（哈佛大学）归来的江泽涵对拓扑学中格林函数临界点的存在性问题（1932，《美国数学杂志》）、能定向的二维闭流形群问题（1936，《中国数学杂志》创刊号）以及不动点理论取得了一系列成果；周绍濂1934年发表点集拓扑学论文；胡世华1939年建立了拓扑空间中“非完全点”概念和理论；曾远荣从1932年起，对泛函分析引入并研究N维实、复或四元数体上的线性空间，得到一些比匈牙利著名泛函分析学家F.黎斯还早的重要结果；曾炯之1933年在德国哥廷根大学发表了中国最早的现代抽象代数学方面的论文，得到代数封闭域上可除代数的研究成果，并创立了拟代数封闭域的层次论。著名的“曾炯之定理”是抽象代数学的经典结果之一。

数学主流太远。而此时，诺特的抽象代数在日本已得到普及，形成了以高木贞治为代表的日本代数学派，并取得了高水平的研究成果。

四十年代，中国数学研究工作多属经典范围，但亦有不少工作进入世界数学主流，并取得了突出的成就。以华罗庚、陈建功、陈省身、许宝騄、苏步青为杰出代表的中国数学家，以非凡的勇气和惊人的智慧，在抗日战争的艰难条件下，向世界数学高峰攀登，开创了中国现代数学事业的光辉篇章。华罗庚在解析数论、典型群、有限群、几何数论、体论、矩阵几何、多复变函数典型域、自守函数等领域，取得了卓越的开创性成就，《堆垒素数论》饋冠欧洲同行。华罗庚的工作与大数学家阿廷、西格尔、H.嘉当等人所进行的研究齐名而名扬国际数学界。陈省身对高维高斯—彭纳公式作了内蕴证明由此导入了示性类和纤维丛理论，开辟了现代大范围微分几何，这为他后来荣获美国数学大奖——斯蒂尔奖和国际最高数学奖——沃尔夫奖，成为举世称誉的数学大师而奠定了基础。许宝騄对概率论、统计推断、极限定理、多元分析的杰出贡献，在概率论特别是数理统计发展史上占有重要地位，尤其是多元分析的奠基性工作处于该学科的发展前沿，最早受到国际数学界推崇。陈建功对傅里叶级数的共轭级数的收敛性、绝对收敛性、傅里叶级数绝对可和性、在定点的负阶察查罗绝对求和性等取得了重要成果。苏步青研究了K展空间几何学的广义射影运动，对几维空间的射影运动方程及群的性质，道格拉斯空间中的K展空间的微小变换等作出了重要的贡献而被载入射影微分几何学的史册。

江泽涵、吴文俊（拓扑学），吴大任、严志达、张素诚、白正国（微分几何、积分几何），柯召（不定方程、二次型），闵嗣鹤（解析数论，与华罗庚合作把莫德尔定理推广到二重三角和情形，独立地把该定理中的多项式推广到几个变数情形），段学

复、王湘浩、张禾瑞、李华宗（代数学）、李国平、庄圻泰、程民德、王福春（函数论），胡世华、莫绍揆（数理逻辑），以及当时尚在国内后来赴美的数学家周炜良（微分方程、积分方程、赴美后从事代数几何研究，以“周环”著称于世）、王宪钟（经典微分几何、代数拓扑、拓扑群和变换群、李群齐次空间、李群的离散子群等等，“王宪钟叙列”尤其著名）、钟开莱（数论、概率论与数理统计）、胡世桢（拓扑学）、樊𰋀（算子与矩阵理论、凸分析与不等式、拓扑学、不动点理论、线性与非线性规划）都取得了重要成就。到四十年代末，已经初步形成了微分几何、拓扑学、数论、函数论的中国学派。

解放后，新中国数学从方面狭窄发展到较为广泛，从队伍小发展到队伍较大，从理论脱离实际发展到纯粹数学与应用数学并进。1952年，正式成立中国科学院数学研究所。1956年国务院制定了“为数学研究开辟新的发展道路”的学科发展十二年规划。到1966年，不少学科都取得了较系统的研究成果，微分方程、数理统计、计算数学、运筹学、数学力学等学科发展尤为迅速。老一辈数学家又作出了新贡献，一大批新生力量在这一时期成长起来崭露头角，逐步成为中国数学界的中坚。五十年代，国内数学学术交流十分活跃，中外数学交流活动也很频繁，但主要是与东欧、东亚国家接触，与西方数学界联系极少。1949—1966年，是中国数学向独立和成熟发展过程中的形成阶段，中国数学水平正在接近当时的国际水平，某些分支学科已作出了相当出色的成就。

有没有教训呢？在五十年代，由于新中国刚成立而缺乏经验，在全面学习苏联中，获益不少，但由于指导思想的片面性，将当时苏联数学闭关自守、脱离主流的弱点也全盘端了过来，从而使我国数学也跟着走了弯路。当时留苏的学生，学的多是经典分析学科，而研究现代应用数学的却只有极少数人，至于学习泛

函分析、拓扑学、大范围微分几何等主流数学的几乎没有。在一些错误观点的影响下，国内拓扑学研究在一段时间内停滞不前，大范围微分几何更是几乎无人问津。而当六十年代后苏联情况发生变化而重新跃入世界数学主流居国际前列时，中国与苏联、东欧各国的学术联系也告中断。在“文化大革命”十年中，中国数学发展跌入低潮，数学界处于与世隔绝的封闭状态。在此期间，尽管有陈景润和王元、潘承洞、陆家羲（彻底解决1850年就提出的组合数学中的Kirkman女生问题和Steiner三元组系问题这两个著名世界难题）、杨乐、张广厚、侯振挺、谷超豪、姜伯驹、张恭庆的高水平成果，但亦无法弥补与国际先进水平总体上的极大差距。

近十年来，我国数学已经复苏，正处于振兴和腾飞的前夜。在总结国内外历史经验、教训的基础上，国家对数学学科发展和人才培养已作了布局和组织。中外学术交流活动日益频繁，一大批中青年数学家迅速成长，刘应明（不分明拓扑）、肖刚（代数几何学）、郑伟安（随机微分几何、随机力学、概率论）、彭家贵、虞言林（大范围微分几何）等正在成为我国数学界的后起之秀，他们的成果受到国内外同行的高度评价。大量论文涌现于各学术性刊物上，许多国际性专业杂志上经常刊载中国学者的高质量论文。多位中国数学家被聘为国外最高级专业杂志《数学评论》的评论员、国家数学会会员、邀请教授、客座教授、研究员等。

但是，由于我国与世界主流数学脱节时间太长，缺门太多，总体差距太大，许多弱点还不可能很快克服。迄今的成果，多是发挥传统优势取胜，而非线性偏微分方程、代数几何、大范围微分几何、低微拓扑、无限维代数、多复变函数论以及生物控制论、人工智能、数理经济学等当前国际上最受重视的一些学科，我国投入的研究力量还太少，在这些领域有所成就的数学家也不

多。在若干领域，我们尚缺乏足够的指导、判断和鉴别评价能力，一些新人的成果还不得不由国外首先对其价值作出评价。另外，教育政策长期摇摆不定、教育科研经费严重不足、对教育实际上的轻视而潜伏的教育危机，无疑给数学发展带来不良影响。我国教育理论长期薄弱，大、中、小学数学基础教育长期不重能力培养，忽视对学生的理解能力和思考能力的严格训练，这样造就的人才虽然基础较扎实，但却是非开拓型的。所以，不管是中学、大学，还是研究领域中，在相应的国际性角逐中经得起拼搏的拔尖人才太少。这也是一个令人优虑的问题。我们至今还未有一个Fields奖获得者，甚至还未有一个在国际数学家大会上作一小时报告的中国数学家。1978至1986年三届国际数学家大会上，列入"数学充分发展国家"名单的，都是美、苏、法、英、日和西德。相比之下，我国数学还居居进，这是应当正视的现实。为此，下决心增大投资，合理调整研究布局，精心培养、组织、扶持攻尖队伍，在充分发挥优势的同时加强主流数学，建设具有中国特色的融各国际学派之长于一炉的中国数学学派和体系，攀登世界数学主峰，乃是当前的紧迫任务。

1984年，中国教育部长何东昌教授聘请美籍华人数学家陈省身教授来华组建南开大学数学研究所，建立了培养高级数学人才的基地。陈省身拟定了"立足南开，面向全国，放眼世界"，向世界主流数学挺进、夺取世界数学"金牌"的实施计划，借助世界第一流数学家指导，结合国内专家的力量，每年接纳从全国各地选拔来的百名优秀数学硕士、博士研究生和包括博士后、教师在内的青年数学工作者学习、进修。近年来，在陈省身的倡议下，中国数学界每年举行四项大规模学术活动：（1）每年在中国举行一次"国际双微（微分几何、偏微分方程）会议"，邀请国内外第一流学者参加。在第七届国际双微讨论会上，国内提交论文133篇，有67篇在会上宣读，其中有的触及到国际数学研究

的前沿，有的在国际数学重大课题的研究上，取得了重要的实质性进展。(2)每年围绕一个重点方向，聘10名世界第一流数学大师作最新成果的系统讲学。(3)约请国际知名数学家为“暑期数学研究生教学中心”讲授现代数学主要基础课。(4)每年以招考方式选拔20名中国研究生赴美，由美国数学会介绍参加“陈省身项目”研读。1986年，著名物理学家、诺贝尔奖获得者杨振宁教授与陈省身合作，在南开数学所建立了理论物理研究室，使理论物理的研究与数学研究密切结合起来。南开数学所已是一个具有国际水平的研究所，它为数学研究提供的设备和条件是当今世界第一流的。这些措施，正有力地推动着中国数学现代化的进程。

陈省身无疑是一位经验丰富、远见卓识的数学发展战略专家。早在1946年，他就从美国普林斯顿高级研究所归来主持“中央研究院数学研究所”(所长为对中国现代数学教育有过重要贡献的姜立夫)，也曾拟订了一个向数学主流——代数拓扑学挺进，并以此为基础推动数学全局进展的计划。这个战略设想，与二十年代初波兰学派从集合论、拓扑学和泛函分析上集中力量，取得国际领先地位后又有步骤地加强代数、几何和应用数学研究，一跃而为数学强国的经验极为相似。上述计划由于局势变化而未能实现，但却产生了不可忽视的影响，特别是培养了吴文俊、张素诚、叶彦谦、路见可、朱德祥、曹锡华、孙以丰、陈杰、陈德璜等二十多名中国数学界的中坚。陈省身赴美国后，又培养、指导了博士邱成桐（大范围微分几何学家、偏微分方程专家，获1981年美国维布伦奖和1983年菲尔兹奖）、廖山涛（五十年代从美国回来，在常微分方程系统的结构稳定性上取得了一系列具有国际先进水平的成果，荣获第三世界科学院1985年首次颁发的数学奖）、郑绍远（著名微分几何学家）。美籍华人肖荫堂、项武义、伍鸿熙、项武忠等，由于陈省身的深刻影响，而在微分几何研究领域取得了著名成就。

今日之中国已远非昔日可比，中国数学的发展进入了现代数学史上最好的时期。陈省身，这位对世界现代数学的历史和现状都了如指掌的前美国国家数学研究所所长，还有他的学生、诺贝尔物理奖获得者杨振宁博士，以其无与伦比的经验和深刻的洞察力，对中国数学的现状和发展形势作了精细的考察、分析，看到了中国坚实的数学基础和巨大的潜在“爆发力”，以及即将崛起而峥嵘于世界数学之林的大趋势。杨振宁预言在纯粹数学领域中国将出现第一流的数学家。陈省身指出，“中国人是有数学天才的，经过努力”，中国有可能成为“二十一世纪的数学大国”。曾在历史上建树过辉煌业绩的中国数学，必定会在新世纪攀高夺顶，在数学史上再度谱写璀灿的篇章。

附录一：国际数学家大会与菲尔兹奖获得者

次数	年份	地点	获奖人				
			姓名	国籍	出生日期（获奖年龄）	获奖前后工作地点	主要专长、成就
1	1897	瑞士苏黎世					
2	1900	法国巴黎					
3	1904	德国海德堡					
4	1908	意大利罗马					
5	1912	英国剑桥					
6	1920	法国斯特拉斯堡					
7	1924	加拿大多伦多					
8	1928	意大利波伦亚					
9	1932	瑞士苏黎世					
10	1936	挪威奥斯陆	阿尔福斯 (Alfors)	芬兰（美籍）	1907.4.18 (29)		单复变函数论。1929年证明法国数学家邓若瓦猜想；1935年发表覆盖面理论；以后转向黎曼面。
			道格拉斯 (J.Douglas)	美国	1897.7.3～1965.10.3 (39)		解决普拉托极小曲面问题即一种非线性椭圆型偏微分方程的第一边值问题；变分问题的逆问题。
11	1950	美国坎布里奇	施瓦兹 (L. Schwarz)	法国	1915.9.15 (35)		创立广义函数论；在泛函分析、率论、偏微分方程方面有许多贡献

续 表

11	1950	美国坎布里奇	塞尔贝格 (A. Selberg)	挪威 (美籍)	1917.6.14 (33)	奥斯陆大学 普林斯顿高级研究所	数论中素数定理的初等证明和对黎曼假设的贡献；弱对称黎曼空间中的调和分析和不连续群及其对狄里克雷级数的应用；连续群的离散子群研究。
12	1954	荷兰阿姆斯特丹	小平邦彦 (Kodaira)	日本 (美籍)	1915.3.16 (39)	普林斯顿高级研究所	调和积分论、代数几何学、复解析几何学
			塞尔 (J. P. Serre)	法国	1926 (28)		代数拓扑学、同调代数、代数几何学、复解析几何学、代数数论。
13	1958	英国爱丁堡	罗斯 (K. F. Roth)	德国 (英籍)	1925.10.29 (33)	伦敦大学	数论。建立了代数数有理逼近的瑟厄—西格尔—罗斯定理。
			托姆 (R. Thom)	法国	1923 (35)	斯特拉斯堡大学	创立拓扑学协边理论、奇点理论、突变理论。
14	1962	瑞典斯德哥尔摩	霍曼德尔 (L.Hormander)	瑞典	1931 (31)	斯德哥尔摩大学	常系数线性偏微分算子理论；变系数线性偏微分方程解的存在性；伪微分算子理论。
			米尔诺 (J.Milnor)	美国	1931 (31)	普林斯顿大学	微分拓扑学中七维球面上存在不同微分结构的证明；否定解决庞加莱主猜想；发展复配边、自旋配边理论；代数K理论和复超曲面的奇点；代数；代数数论。

续 表

次数	年份	地点	获奖人				
			姓名	国籍	出生日期(获奖年龄)	获奖前后工作地点	主要专长、成就
15	1966	苏联莫斯科	阿蒂雅 (M. F. Atiyah)	英国	1929.4.22 (37)		代数学、代数几何学、拓扑学、分析学、理论物理学，特别是给出阿蒂雅一辛格指标定理。
			科恩 (P. J. Cohem)	美国	1934.4.2 (32)	斯坦福大学	证明连续统假设与 ZF 集合公理系统彼此独立。
			格罗申第克 (A. Grothendieck)	法国	1928.3.24 (38)		创立了一整套现代代数几何学抽象理论体系；在泛函分析中引入核空间、张量积。
			斯梅尔 (S. Smale)	美国	1930.7.15 (36)		解决微分拓扑学中"广义庞加莱猜想"；创立现代抽象微分动力系统理论。
16	1970	法国瓦斯	贝克 (A. Baker)	英国	1939.8.19 (31)	剑桥大学	超越数论；代数数论；不定方程，解决了数论中十几个困难问题。
			广中平佑 (Kiromaka)	日本 (美籍)	1931 (39)	哈佛大学	完全解决代数几何学中复代数簇的奇点解消问题；一般奇点理论。

续 表

16	1970	法国瓦斯	诺维科夫 (С. П. Новиков)	苏联	1938.3.20 (32)	斯捷克洛夫数学研究所	微分拓扑学配边理论，叶状结构理论。微分流形的有理邦德里雅金示性类的拓扑不变性、孤粒子理论。
			汤普逊 (J. G. Thompson)	美国	1932.10.13 (38)	芝加哥大学	解决有限单群的伯恩赛德想猜和弗洛贝纽斯猜想。
17	1974	加拿大温哥华	曼福德 (D. B. Mumford)	英国 (美籍)	1937.6.11 (37)	哈佛大学	代数几何学参模理论；代数曲面理论。
			朋比利 (E. Bombieri)	意大利	1940.11.26 (34)	米兰大学 比萨大学	改进数论大筛法证明哥德巴赫猜想(1+3)；对极小曲面问题的伯恩赛德猜想提出反例；有限单群分类问题中一类李型单群的唯一性证明。
18	1978	芬兰赫尔辛基	费弗曼 (C. Fefferman)	美国	1949.4.18 (29)		傅里叶级数收敛问题及其与奇异积分算子的联系；发现哈代空间 H^1 与有界平均振动函数空间的对偶关系；非退化线性偏微分方程局部可解性；多复变函数论。
			马古利斯 (Г. А. Маргулис)	苏联	1946 (32)	莫斯科通讯研究所	彻底解决关于李群的离散子群的塞尔贝格猜想。
			德利涅 (P. Deligne)	比利时 (法籍)	1944.10.3 (34)	法国高等研究所	解决代数几何学中联系素数与有限域中代数方程根的个数的魏依猜想。

续　表

次数	年份	地点	获奖人				
			姓名	国籍	出生日期 获奖年龄	获奖前后 工作地点	主要专长、成就
18	1978	芬兰赫尔辛基	奎伦 (D. Quillen)	美国	1949.4.18 (29)	马萨诸塞理工学院	同伦理论；代数K理论；复配边理论与形式群理论；解决K理论中亚当斯猜想；同调代数一有限群的上同调论；解决关于抽象空间结构问题的塞尔猜想。
19	1983	波兰华沙 (原订于1982年召开，因波兰政局变化而延期)	康奈斯 (A. Connes)	法国	1947.4.1 (35)	巴黎高等科学研究所	算子代数（环）“因子”的分类及算子代数与K理论、指标定理、叶状结构、微分动力系统的关系。
			瑟斯顿 (W. Thurston)	美国	1946.10.30 (36)	普林斯顿大学	三维流形的拓扑分类；三维流形的叶状结构理论。
			邱成桐 (Yau Sheng Tung)	中国 (美籍)	1949.4.4 (33)	普林斯顿高级研究所	大范围微分几何学；非线性偏微分方程。证明卡那比猜想、广义相对论中正质量猜想、弗兰克尔猜想等一系列代数几何学、复解析几何学、微分几何学、广义相对论的重要问题和偏微分方程难题。

续　表

20	1986	美国加利福尼亚	法尔廷斯 (G. Faltings) (32)	西德 (美籍)	1954.7.28	普林斯顿大学 乌珀塔尔大学	用代数几何学方法证明了数论中六十年中未能解决的莫德尔(Mordell)猜想。
			弗里德曼 (M. Freedman) (35)	美国	1951.4.21	加州大学圣地亚哥分校	证明四维流形拓扑的庞加莱猜想。
			唐纳森 (S. Donaldson) (29)	英国	1957.8.20	牛津大学	关于四维流形拓扑的研究。

注：Fields奖在国际数学家会议(ICM)每届大会的第一项议程中颁发。此奖由已故加拿大数学家J.C. Fields于1924年提议设立。首届评奖是在1936年的奥斯陆大会。此奖奖给不超过40岁的年轻数学家。它是当今数学界的最高荣誉，被誉为数学界的“诺贝尔奖”。

附录二：　　国际沃尔夫(Wolf)奖获得者

年份	姓　名	国　籍	出生日期	主要专长、成就
1978	盖尔芳德 И. М. Гельфанд	苏联	1913	创立赋范环（即泛函分析中的巴拿赫代数）理论、无限维表示论、广义函数论；自守函数、谱分解、代数学、生物数学等。
	西格尔 C. L. Siegel	西德	1896—1981	数论中的华林问题、群论、代数学二次型、多复变函数论、微分几何、代数几何、微分方程中微分流形定性理论、力学中的三体问题。
1979	勒　瑞 J. Leray	法国	1906	泛函分析不动点理论、微分算子（强双曲型算子），在同调代数层理论中引入层系数上同调群，对纤维空间引入谱序列方法从而开创了谱序列理论，讨论了广义导数以及流体力学中Navier-Stokes方程边界值问题的解的存在性。以残数的同调类的观点重新建立了多复变函数的积分表示论中的Cauchy-Fantappiè公式，清楚地（至少在极点成一流形的情形）定义了多复变数的残数概念。
	魏　依 A. Weil	法国	1906	在纯粹数学的许多领域如泛函分析、多复变函数论、微分方程动力系统、代数函数论、有限群、数论、特别是微分几何、代数几何，都有杰出贡献，做过奠基性工作，对20世纪数学产生了极大影响。他在把相交理论奠基于抽象域的同时，把

续表

年份	姓　　名	国　籍	出生日期	主要专长、成就
1979	魏　依 A. Weil	法国	1906	几何思想引进抽象代数理论中，建立了代数几何学基础理论。"魏依猜想"把代数几何学研究推向高峰。证明了微分几何中高维 Gauss-Bonnet 公式。推广了代数数论的莫德尔定理并开辟了群上的调和分析这个新领域和不定方程的新方向。
1980	亨·嘉当 H. Cartan	法国	1904	多复变函数论、同调代数、代数拓扑学、位势理论等。
	柯尔莫哥洛夫 A. H. Колмогоров	苏联	1903	创立概率论公理化体系，开创预报理论；概率论中极限定理和随机过程的研究；定义上同调群；在三角级数论、测度论、集论、积分论等领域都有杰出建树。
1981	阿尔福斯 Alfors	芬兰 (美籍)	1907	见菲尔兹奖获得者栏。
	查瑞斯基 O. Zariski	美国 (原籍俄国)	1899	奠定了代数几何学理论基础；解决了代数曲面奇点解消问题和三维代数簇奇点解消问题；证明了所谓"查瑞斯基主要定理"，并由此阐明了双有理对应的性质。
1982	克雷因 M. Г. Крейн	苏联	1908	函数论、微分方程论；创立泛函分析非自伴算子理论。

续表

年份	姓　　名	国籍	出生日期	主要专长、成就
1982	惠特尼 H. Whitney	美国	1907	证明了微分流形浸入定理、微分映射的性质等从而创立了微分拓扑学；研究了微分几何学中微分流形联络、奇点问题和上同调环问题，引入了纤维丛概念。
1983	陈省身	中国（美籍）	1911	对Gauss-Bonnet定理作内在证明，引入在整个纯粹数学中都有重要应用的"陈省身示性类"，奠基纤维丛理论，创立了现代大范围微分几何。在积分几何、网几何、复流形和极小子流形多复变函数论等方面都有重大贡献。
	厄尔多斯 P. Erdos	匈牙利	1913	数论、集合论、概率论、组合数学等。特别是与美籍挪威数学家塞尔贝格分别独立地用初等方法成功地证明了数论中的素数定理。
1984	小平邦彦 Kodaira	日本	1915 (69)	调和积分，给出了代数几何学一系列大定理，如用调和积分论把代数几何学的中心定理"黎曼—洛赫定理"由曲线推广到曲面；证明了狭凯勒流形是代数流形；证明了所谓小平邦彦消灭定理。建立了对代数几何、复解析几何和理论物理都有重要应用的关于复结构变形理论的一套系统理论。深入研究了紧致复解析曲面的结构和分类。

续表

年分	姓　名	国　籍	出生日期	主要专长、成就
1984	勒　维 H. Lewy	德国 (美籍)	1904— (80)	对偏微分方程理论作出了奠基性贡献。他首先给出反例证明了存在算子$P(x,D)$，使一般偏微分方程$P(x,D)u(x)=f(x)$无广义函数解。他把希尔伯特第19问题（即若F关于变元解析，则椭圆型偏微分方程$F=0$的任意解在其存在域内也解析）中的变元推广到复域，简化了问题的证明。
1985	爱伦伯格 (S.Eil- enberg	波兰 (美籍)	1913	代数拓扑学、同调代数、范畴论、自动机理论。
	塞尔贝格 (A.Sel- berg)	挪威 (美籍)	1917.6.14	数论，调和分析，李群离散子群。 （详见"附录一"）
1986	伊籐清 (K.Itô)	日本	1915(71)	概率论随机过程，随机分析，随机微分方程。
	拉克斯 (P.Lax)	匈牙利 (美籍)	1926(60)	分析学、偏微分方程（非线性守恒律、kdv方程）应用数学，散射理论等。
1987	赫采布鲁赫 (F.Hirzeb- ruch)	西德	1927(59)	代数几何学、拓扑学(K理论)、数论。把拓扑学、代数、微分几何以及代数数论结合起来的出色工作而获奖。

续表

年份	姓　　名	国　籍	出生日期	主要专长、成就
1987	霍曼德尔 (L. Hormander)	瑞典	1931(55)	在现代分析特别是拟微分及Fourier积分算子在线性偏微分方程的应用方面的奠基性工作而获奖。
1989 (1988年底宣布)	卡尔德隆 (Alberto P. Calderon	阿根廷 (美籍)	1920.9.20 (69)	在调和分析及其在偏微分方程上的应用的决定性贡献而获奖。
	米尔诺 (J. Milnor)	美国	1931.2.20 (57)	微分拓扑学上最重要的突破—证明7维球面上有不止一种的微分结构，与Kervaire等人合作定出28种不同微分结构，并定出高维球面上微分结构的数目，发展复配边理论及自旋配边理论。对于复形，否定地解决了H. Tietze 1908年提出的"主猜想"：一个同胚的多面体有两个不同构的剖分。发展微丛理论。在研究Hopf代数理论、Whitehead挠元、代数K理论、微分几何学(曲率与基本群的关系、复超曲面的奇点)、二次型理论、代数数论以及近来的应用数学问题均有突出贡献。

注：Wolf基金会总部设在以色列，由已故 Ricardo Wolf创建于1975年，旨在"促进科学和艺术的发展以造福于人类"，每年给在化学、农业、医学、物理学、数学和艺术方面的杰出成就者颁奖。Wolf博士是化学家、慈善家和外交家，他生于德国，第一次世界大战前移民到古巴，1961年成为古巴驻以色列大使，1981年死于以色列。

主要参考文献

[1] (美)M.克莱茵：《古今数学思想》，上海科技出版社1980年版
[2] 日本数学会：《数学百科辞典》，科学出版社1984年版
[3] 中国科学院自然科学史研究所近现代科学史研究室：《20世纪科学技术简史》，科学出版社1985年版
[4] 王元：《华罗庚教授在数论上的贡献》
万哲先：《华罗庚教授在代数几何上的贡献》
龚昇：《华罗庚教授在多复变函数论上的贡献》
陈德泉、计雷、李之杰：《华罗庚教授在应用数学方面的贡献》
以上文献载《数学进展》Vol.15，No.3
[5] 刘应明、胡作玄：《拓扑学进展》
钟家庆：《多复变函数论进展》
秦元勋：《常微分方程进展》
谷超豪、李大潜：《偏微分方程进展》
陈希孺：《数理统计进展》
以上文献载1982年《自然科学年鉴》
[6] 楼世拓：《数论进展》
胡和生：《微分几何学进展》
胡作玄：《拓扑学进展》
杨乐、任福尧、沈燮昌：《单复变函数论进展》
夏道行：《泛函分析进展》
陈木法、汪嘉冈：《概率论进展》
韩继业：《运筹学进展》
以上文献载1981年《自然科学年鉴》

[7] 陈木法：《概率论的一些新进展》，《数学季刊》1986，1.
[8] 陈希孺：《本世纪以来数理统计发展的历史和现状的若干问题》，《华中师院学报》（自然科学版）1980，1.
[9] 方开泰：《广义多元分析简介》，《数学进展》Vol.16，№.1
[10] 曹锡华、王建磐：《Chevally群及其表示概述》，《数学进展》Vol.41，№.1
[11] 徐明曜：《关于有限P-群的若干问题》，《数学进展》Vol.14，№.3
[12] 《中国百科年鉴》（1981，1983，1985）
[13] （法）让·迪多内：《布尔巴基的工作》，《数学史译文集续集》上海科技出版社1985年版
[14] 苏步青、孙莱祥：《新中国数学工作的回顾》，1979年《自然杂志年鉴》
[15] 苏步青：《微分几何学在中国的成长与发展》，《数学译林》1985，Vol.4，№.1
[16] 法国国家科研中心：《数学与数学模型Ⅰ、Ⅱ》，《数学译林》1985，Vol.4，№.1 №.2
[17] 张奠宙、赵斌：《二十世纪数学史话》，知识出版社1985年版
[18] 张奠宙：《二十世纪的中国数学与世界数学主流》，《自然科学史研究》1986年Vol.5，№.3
[19] 胡作玄、赵斌：《菲尔兹奖获得者传》湖南科技出版社，1984年8月
[20] 胡作玄：《第三次数学危机》 四川人民出版社1985年版
[21] 胡作玄：《布尔巴基学派的兴衰》 知识出版社1984年版
[22] 林夏水主编：《数学哲学译文集》 知识出版社1986年版
[23] 杜石然、梅荣照：《评李约瑟著〈中国科学技术史〉一书的数学部分》科技史文集第8辑，上海科技出版社1982年9月
[24] 吴文俊：《我国古代测望之学重差理论评介兼评数学史研究中某些方法问题》，同上
[25] 吴文俊先生在教育部主办的全国高校中外数学史讲习班开学典礼上的讲话 载《中国数学史论文集》（二）山东教育出版社1986年8月
[26] 李继闵：《试论中国传统数学的特点》 同上

[27] Н.К.Бари: Лузин传 《数学译林》1985Vol.4, №.1
[28] 傅庭芳:《朱世杰与李善兰在垛积术上的成就》,《中国数学史论文集》(二),山东教育出版社1986年8月
[29] 张家龙:《公理学、元数学与哲学》,上海人民出版社,1983年3月
[30] 杨正江:《非欧几何发现的哲学意义》,《哲学研究》1984年第5期
[31] 王友恭:《制约逻辑诞生记》 1986年8月2日《人民日报》
[32] 《四川师大中年教师丁协平被选入美国马奎斯〈世界名人录〉》,1986年4月5日《中国教育报》
[33] 《华东师大一批中青年教师擢升教授》,1986年5月27日《文汇报》
[34] 朱学志:《数学史数学方法论选讲》,黑龙江林业教育学院
[35] 徐利治:《数学方法论选讲》,华中工学院出版社1983年4月
[36] 张锦文:《集合论与连续统假设浅说》,上海教育出版社1980年6月
[37] Robert Bechhofer:《纪念国际著名统计学家杰克·卡尔·凯佛》《数学的实践与认识》1984年第1期
[38] (苏)A.Д.亚历山大洛夫等:《数学—它的内容、方法和意义》,科学出版社1962年版
[39] 《陈建功文集》 科学出版社1981年版
[40] 《中国科苑英华录》(上册) 科学普及出版社1985年9月版
[41] 曾少潜主编,《世界著名科学家简介》,科学技术文献出版社1981年版
[42] 《86年国际数学家大会概况》,《中国数学会通讯》1986第4期总第20期.
[43] 杨乐:《1986年国际数学家大会一瞥》,载《百科知识》1987年第1期
[44] (美)H·伊夫斯:《数学史概论》,山西人民出版社1986年版
[45] (美)D.J.斯特洛伊克:《数学简史》科学出版社1956年版
[46] (美)L.A.斯蒂恩主编:《今日数学》,上海科技出版社1982年版
[47] (苏)Б.В.鲍尔加尔斯基:《数学简史》,知识出版社1984年版
[48] (瑞典)L.戈丁:《数学概观》
[49] (美)A.罗宾逊:《非标准分析》,科学出版社1980年版
[50] (波兰)安德热依·莫斯托夫斯基:《数学基础研究三十年》,华中工学院出版社1983年7月版

[51] 林邦谨：《制约逻辑》，贵州人民出版社1985年12月版
[52] （德）赫尔曼·韦尔：《埃米·诺特》《数学史译文集》（续集），上海科技出版社1985年11月版
[53] （法）雅·阿达玛：《亨利·邦加雷和数学》，同上
[54] （法）让·迪多内：《邦加雷传》，同上
[55] （美）纳·莱文生：《维纳传》，同上
[56] 戈登·迈·菲希尔：《柯西和无穷小》，同上.
[57] 哈雷尔德·爱德华：《菲尔兹奖简史》，同上
[58] 北京大学《许宝騄文集》编辑委员会：《许宝騄文集》，科学出版社1981年版
[59] 陈昌曙、远德玉主编：《自然科学发展简史》，辽宁科技出版社1985年版
[60] 葛能全：《科学技术发现发明纵览》，科学出版社1986年版
[61] 中国科学家辞典编委会：《中国科学家辞典》现代第二分册，第三分册.山东科技出版社1983年5月，1984年版
[62] 刘尊全：《数学机械化的现状与展望》.《自然辩证法通讯》Vol，3，№1，1981
[63] 胡作玄：《当代的大思想家——罗素》，同上.
[64] 魏宏森、林尧瑞：《人工智能的历史和现状》，《自然辩证法通讯》Vol.3，№4，1981
[65] （加拿大）Stephen Salaff，《华罗庚传略》（A biography of Hua Lo-Keng）《中国科技史料》1986年
[66] 程民德、夏道行等：《一代学者陈建功的学术境界》，1982年《自然科学年鉴》
[67] 刘应明：《层次结构，择一原则及其他》，《大自然探索》Vol.6，Sum №.19 №.1，1987
[68] 汪培庄、刘锡荟：《人脑·计算机·模糊数学》，《大自然探索》Vol，6，Sum №.19，№.1，1987
[69] 梅荣照、王渝生：《解析几何能在中国产生吗？》《自然辩证法通讯》，1983，№.3.
[70] 梁宗巨：《中国数学落后的历史原因分析》，同上.
[71] 郭玺彬：《14世纪后中国数学中断的原因》，同上.

[72] 乐秀成：《数学发展的模式》，同上.
[73] 袁小明：《拉格朗日：十八世纪伟大的数学家和天体力学家》
《自然辩证法通讯》1986，№.3.
[74] Jean Itard：《拉格朗日传》，《数学译林》1985. Vol.4.№.3.
[75] 陈克艰：《数学哲学中的直觉主义观点》，《自然辩证法通讯》1983.
№.2.
[76] [荷] A. 海丁著，林夏水译：《直觉主义的数学基础》，《自然科学哲学问题丛刊》1985，第1期.
[77] [德]R.卡尔纳普著，林夏水译：《逻辑主义的数学基础》，《自然科学哲学问题丛刊》1984，№.4.
[78] [美]J.冯·诺伊曼著，林夏水译：《形式主义的数学基础》，《自然科学哲学问题丛刊》1985.№.2.
[79] [英]M.贾昆涛著，林夏水摘译：《希尔伯特的数学哲学》
《自然科学哲学问题丛刊》1985年.№.4.
[80] 王国俊：《不分明拓扑学的若干研究方向》，《数学研究与评论》Vol.7.№.2.
[81] П.С.Александров, В. В.Федорчук：《点集拓扑学发展的几个奠基性时刻》（上）、（下），《数学译林》1984第3卷 第3期、第4期
[82] （法）J.Dieudonné：《近三十年来Bourbaki学派的工作》
《数学译林》1984 第3卷 第3期.
[83] （波兰）K.Kuratowski：《波兰数学学派的兴起》（Ⅰ）（Ⅱ）
《数学译林》1982第1卷 第1，2期.
[84] 张洪光：《陈省身和现代微分几何》中国科技史料Vol.9№.3
[85] 周伯壎：代数学（环论）
任福尧：单复变函数论（单叶函数论）
龙瑞麟：调和分析　　　　俞文魮：运筹学
以上文献载1984年《自然科学年鉴》"进展"
[86] 曹锡华：代数学
何声武：概率论　　　　成　平：数理统计
陈志华：多复变函数论
以上文献载1987年《自然科学年鉴》"进展".

人 名 索 引

尼伦伯格(L. Nirenberg 1925～)
布尔(G. Boole 1815～1864)
布劳威尔(L. E. J. Brouwer 1881～1967)
布拉须盖(W. Blaschke)
弗雷歇(M. Frechet 1878～)
弗雷格(G. Frege 1848～1925)
弗里德曼(M. Freedman 1951～)
弗洛贝纽乌斯(F. G. Frobenius 1849～1917)
卡诺(L. N. M. Carnot 1753～1823)
卡瓦列利(B. Cavalieri 1598～1647)
卡拉热沃多利(Carathéodory)
卡尔森(L. Carleson)
叶果洛夫(Егоров 1869～1931)
申农(Shannon 1916～)
皮尔逊(E. S. Pearson)
皮尔逊(K. Pearson)

六　画

齐格蒙德(A. Zygmund 1902～)
齐曼(E. C. Zeeman)
米尔诺(J. W. Milnor 1931～)
汤普逊(J. G. Thompson 1932～)
刘维尔(J. Liouville 1809～1882)
列维-契维塔(Levi-Civita 1873～1941)
吉洪诺夫(A. H. Тихонов)
吉布斯(J. W. Gibbs 1839～1903)
西格尔(C. L. Siegel 1896～1981)
亚历山大(J. W. Alexander 1888～1971)
亚历山大洛夫(П. С. Александров 1896～1982)
托姆(R. Thom 1923～)
达朗贝尔(J. R. d'Alembert 1717～1783)
毕卡尔(C. E. Picard 1856～1941)
毕达哥拉斯(Pythagoras 前572～前497)
伊籐清(Kiyosi Itô 1915～)
邦德里雅金(A. C. Понтрягин 1908～)
华林(E. Waring 1734～1798)
约翰,贝努里(Johann Bernoulli 1667～1748)

七　画

沃德(A. Wald 1902～1950)
库莫尔(E. E. Kummer 1810～1893)
库拉托夫斯基(C. Kuratowski)
怀特黑德(A. N. Whitehead 1861～1947)
辛格尔(I. M. Singer)
辛钦(Хенчин 1894～1959)
阿廷(E. Artin 1896～1962)
阿诺尔德(Арноьлд)

八　画

九　画

十　画

海林格（E. Hellinger）
高斯(C. F. Gauss 1777～1855)
高木贞治(Takagi, Teiji, 1875～1960)
诺特（E. Noether 1882～1935)
诺维科夫（С. П. Новиков 1938～)
唐纳森（S. Donaldson 1957～)
格拉斯曼（H. G. Grassmann 1809～1877)
格涅坚科（Гнеденко)
格罗申第克（A. Grothendiek 1928～)
格里菲斯（P. A. Griffiths)
埃尔米特（C. Hermite 1822～1901)
埃瑞斯曼（C. Ehresmann)
莱布尼兹（G. W. Leibniz 1646～1716)
莱夫舍茨（S. Lefschetz)
索伯列夫（Соболев 1906～)
索福斯·李（Sophus. Lie 1842～1899)
莫尔斯（M. Morse 1892～)
哥德巴赫（C. Goldbach, 1690～1764)
哥德尔（K. Gödel, 1906～1976)
根茨（G. Gentzen)
夏皮罗（H. Shapiro)
恩弗罗（P. Enflo)
爱伦伯格（S. Eilenberg, 1913～)
爱因斯坦（A. Einstein, 1879～1955)

十 一 画

康托尔（G. Cantor, 1845～1918)
康托洛维奇（Л. В. Конторовнч, 1912～)
康奈斯（A. Connes 1947～)
盖尔封特（A. O. Гельфонд 1906～1968)
盖尔芳德（И. M. Гельфанд 1913～)
勒让德（A. M. Legendre 1752～1833)
勒瑞（J. Leray 1906～)
勒维（H. Lewy 1904～1988)
勒贝格（H. Lebesgue 1875～1941)
菲特（Feit 1930～)
维尔斯特拉斯（K. Weierstrass 1815～1897)
维纳（N. Wiener 1894～1964)
维布伦（Veblen 1880～1960)
维诺格拉多夫(Виноградов 1891～1983)
笛卡尔（R. Descartes 1596～1650)

十 二 画

富比尼（Fubini 1829～1943)
道格拉斯（J. Douglas 1897～1965)
普阿松（S. D. Poisson 1781～

1840)
彭色列 (J. V. Poncelet 1788～1867)
斯坦纳 (J. Steiner 1763～1863)
斯坦因豪斯 (H. Steinhaus 1887～1972)
斯蒂阶 (T. J. Stieltjes 1856～1894)
斯米尔诺夫 (B. И. Смирнов 1887～1974)
斯梅尔 (S. Smale 1930～)
塔尔斯基 (A. Tarski 1902～1983)
雅可比 (K. G. J. Jacobi 1804～1851)
雅科布·贝努里 (Jakob Bernoulli 1654—1705)
雅尼斯柴夫斯基 (Janiszewski ?～1920)
惠更斯 (C. Huygens 1629～1695)
惠特尼 (H. Whitney 1907～)
黑肯 (W. Haken)
策墨罗 (E. Zermelo, 1871～1953)
鲁津 (Лузин. 1883～1950)
鲁菲尼(P. Ruffini, 1765～1832)
傅里叶(J. Fourier 1768～1830)
奥斯特洛格拉德斯基 (M. B. Остроградский 1801～1861)

十三画

塞尔 (J. P. Serre 1926～)
塞尔贝格 (A. Selberg 1917～)
蒙日 (G. Monge 1746～1818)
瑟斯顿 (W. Thurston 1946～)
歇瓦莱 (C. Chevalley 1909～1984)

十四画

豪斯多夫 (Hausdorff 1868～1942)
赫尔维兹 (A. Hurwitz 1859～1919)
赫采布鲁赫(F. Hirzebruch 1927～)
嘉当 (E. Cartan 1869～1951)
嘉当 (H. Cartan 1904～)

十五画

德恩 (M. Dehn 1878～1952)
德利涅 (P. Deligne 1944～)
黎兹 (F. Riesz 1880～1953)
黎兹 (M. Riesz 1886～1969)
黎曼 (G. F. B. Riemann 1826～1866)

十六画

霍甫 (H. Hopf 1895～1971)
霍杰 (Hodge 1903～)
霍夫曼 (A. J. Hoffman 1924～)
霍曼德尔 (L. Hormander 1931～)

十 七 画

戴德金（R. **Dedekind** 1831～1916）

魏伊（A. Weil 1906～）

魏德伯恩（**Wedderburn** 1882～1948）

[G e n e r a l   I n f o r m a t i o n]
书名= 近现代数学发展概论
作者= 张光运[编著]
页数= 4 4 7
S S 号= 1 0 0 6 8 2 0 0
出版日期=